This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 491543

ZUR

THEORIE

DER ALLGEMEINSTEN

VERBINDUNGEN.

VON

Dr. A. ARNETH.

Digitized by Google

FROM THE LIBRARY OF
Professor Karl Heinrich Rau
OF THE UNIVERSITY OF HEIDELBERG
PRESENTED TO THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
BY
Mr. Philo Parsons
OF DETROIT
1871

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ZUR

THEORIE

DER ALLGEMEINSTEN

VERBINDUNGEN.

Digitized by Google

Digitized by Google

10828

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

DIE

GEDOPPELTEN

VERBINDUNGEN

mit und ohne

WIEDERHOLUNG ZU BESTIMMTEN SUMMEN

und die

GESCHÄFTE

WELCHE DIESE VERBINDUNGEN ERZEUGEN

von

Dr. A. ARNETH,

Privatdocent an der Universität zu Heidelberg.

HEIDELBERG und LEIPZIG.

Verlag der Neuen Akademischen Buchhandlung von KARL GROOS.

1833.

Digitized by Google

Digitized by Google

Dem

Herrn

Dr. FERD. SCHWEINS,

Grossherzogl. Badischem Hofrathe und ordentl. Professor der Mathematik
an der Universität Heidelberg

seinem hochverdienten Lehrer

als

ein Zeichen der innigsten Dankbarkeit und Hochachtung

zugeeignet

von

dem Verfasser.

Digitized by Google

Digitized by Google

VORREDE.

Die Analysis hat in der neusten Zeit in Deutschland die bedeutendsten Fortschritte gemacht; wir verdanken dies besonders der combinatorischen Methode. Wir ermangelten jedoch lange eines vollständigen Werkes über combinatorische Analysis, bis Schweins im Jahre *1820*, in seiner Analysis, die Arbeiten seiner Vorgänger, im Vereine mit seinen eigenen Untersuchungen, der gelehrten Welt übergab. Sollte Jemand an dem Werthe der neuen Methode noch zweifeln können, so mag er sich in diesem gehaltvollen Buche eine bessere Ueberzeugung holen. Seitdem ist über diesen Gegenstand wenig geschrieben und nichts Neues gefunden worden; wir haben uns daher in dem Folgenden immer auf dieses Werk beziehen können, worin man auch das Geschichtliche nachsehen kann. Ueber die Summen der geordneten Verbindungen mit und ohne Wiederholung besitzen wir zwar neuere Bemühungen, die Sache ist jedoch durch dieselben nicht gefördert worden, Schweins hat schon in der dritten Abhandlung seiner Analysis

Digitized by Google

diese Summen auf die der Potenzen der allgemeinen Zahlenreihe zurückgeführt.

Wenn die Einheit nach und nach durch ein und dasselbe Polynomium mehrmals gemessen wird, so entstehen Verbindungen, welche nur ein Gesetz darbieten, wenn man zur Vertheilung der Elemente in Fächer seine Zuflucht nimmt. Diese Zerfällungen oder Vertheilungen schienen mir dem Geiste der Methode nicht angemessen und da durchaus nicht zulässig, wo nur von Zusammensetzung die Rede seyn konnte. Wir fassten daher den Gegenstand allgemeiner auf, wiederholten das Vervielfachen und Messen mit mehrtheiligen, ungleichen Grössen und gelangten so zu den gedoppelten Verbindungen mit und ohne Wiederholung zu bestimmten Summen, welche uns wieder, im Vereine mit den gedoppelten Verbindungen die Schweins *1825* in seiner Differenzial-Rechnung bekannt gemacht hat, zur Idee der allgemeinsten Verbindungen führten. Zu spät haben wir die neueste Schrift dieses Geometers, seine Grössenlehre, erhalten, um sie bei der Ausführnng dieser Idee benutzen zu können, wir verweisen daher unsere Leser auf dieses interessante Werkchen.

Die ersten Andeutungen der gedoppelten Verbindungen ohne Wiederholung findet man in vielen Schriften, durch die aufgenommene Bezeichnung zuerst deutlich ausgesprochen, finden sie sich bei Schweins *); aber weder von den gedoppelten Verbindungen mit Wiederholung noch von irgend einem der vielen

*) Differenzial-Rechnung, pag. 619.

Digitized by Google

Gesetze, welche wir für beide Verbindungsweisen aufgefunden haben, findet sich die geringste Spur.

Die allgemeinsten Verbindungen müssen für die Wissenschaft von der grössten Wichtigkeit werden, zu welchen bedeutenden Resultaten haben nicht schon die Produkte mit Versetzungen geführt *)!

Die bis jetzt bekannten Combinationen sind als specielle Fälle in den allgemeinsten Verbindungen enthalten, wir mussten daher auch bei unsern Untersuchungen auf die speciellen Gesetze kommen, die in der sechsten Abhandlung der Analysis für die geordneten Verbindungen, mit und ohne Wiederholung, enthalten sind. Ausserdem haben wir aber auch für diese speciellen Verbindungen viele Wahrheiten gefunden, welche bisher gänzlich unbekannt waren. Die Untersuchungen über die Beschränkung der untern Stellenzahlen sind ganz neu, sie haben uns zu den speciellen Gleichungen *97* und *98* geführt, aus welchen die schon — aber ohne Beweis — bekannten Gesetze *100* und *102* hervorgehen; wenn die Elemente alle = *1* werden.

Die Untersuchungen in der zweiten Abtheilung sind fast ganz neu; was sich bei Schweins über die geordneten Verbindungen mit Wiederholung vorfand, haben wir am gehörigen Orte angegeben. Besondere Aufmerksamkeit verdienen die Gesetze *195* bis *198*. Der Inhalt des Anhanges findet sich bis zum §. *24*. schon bei Euler, die folgenden Untersuchungen sind neu.

---

*) Differenzial-Rechnung, pag. 435 bis 549.

Digitized by Google

In den beiden letzten Abtheilungen hatten wir keinen andern Zweck als die nächsten Anwendungen unserer Verbindungen zu zeigen, das Allgemeine ist auch hier neu, die speciellen Wahrheiten meistens schon bekannt, den Inhalt der §§. *33*, *35*, *36* so wie *40*, *42*, *43* geben wir hier zuerst.

Die Untersuchungen, welche wir hier dem mathematischen Publicum vorlegen, sind zum Theil schon vor *1825* geschrieben; eine ganz andere Gestalt erhielten sie dadurch, dass wir, nach der Erscheinung von Schweins Differenzial-Rechnung, seine Bezeichnung aufnehmen konnten. Seitdem haben wir noch allgemeinere Wahrheiten gefunden, welche, wenn die gegenwärtigen Abhandlungen Beifall finden sollten, wir mit Anwendungen auf die Fakultäten, bald bekannt machen werden.

Digitized by Google

THEORIE

DER GEDOPPELTEN

VERBINDUNGEN

mit und ohne

Wiederholung zu bestimmten Summen.

Digitized by Google

Digitized by Google

THEORIE
DER GEDOPPELTEN
VERBINDUNGEN
mit und ohne
Wiederholung zu bestimmten Summen.

Wenn man eine Reihe von Elementen

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$$

auf alle mögliche Weisen so zusammenstellt, dass immer eine bestimmte Anzahl p derselben, mit Gestattung der Wiederholung eines einzelnen Elementes, in einer Zusammenstellung erscheinen darf, so erhält man sehr allgemeine Verbindungen, welche viele untergeordnete Verbindungsarten in sich schliessen. Von diesen secundären Verbindungen erwähnen wir bloss die geordneten Verbindungen mit und ohne Wiederholung und die Zusammenstellungen zu bestimmten Summen. In solcher Ausdehnung ward dieser Gegenstand schon von den ersten Begründern der combinatorischen Analysis gegeben.

Im Jahre 1825 führte Schweins, in seiner Differenzialrechnung, die Produkte mit Versetzungen und andere gedoppelte Verbin-

Digitized by Google

dungen in die Wissenschaft ein. Sie standen aber bis jetzt noch vereinzelt in keiner allgemeinen Ideenverbindung. Die gegenwärtigen Abhandlungen sind ein Versuch, diese Lücke auszufüllen.

Wenn man in mehreren, unter sich verschiedenen, Reihen von Elementen

$$\begin{array}{llllll}
A_1^{(1)}, & A_2^{(1)}, & A_3^{(1)}, & A_4^{(1)}, & \ldots & \\
A_1^{(2)}, & A_2^{(2)}, & A_3^{(2)}, & A_4^{(2)}, & \ldots & \\
A_1^{(3)}, & A_2^{(3)}, & A_3^{(3)}, & \ldots & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
A_1^{(n)}, & A_2^{(n)}, & \ldots & \ldots & \ldots &
\end{array}$$

die Glieder derselben, unter sich sowohl, als mit denen der andern Reihen, auf alle mögliche Weisen zu p Elementen verbindet, mit Gestattung der Wiederholung der einzelnen Elemente, so entstehen die allgemeinsten Verbindungen, welche wir hier zuerst bekannt machen.

Aus der Reihe der allgemeinsten Verbindungen kann man nun untergeordnete Verbindungsarten heraus heben, dahin gehören die erwähnten gedoppelten Verbindungen und die Produkte mit Versetzungen von Schweins; sie enthält ferner noch, unter andern, Verbindungsweisen, wo die oberen Stellenzahlen geordnete Verbindungen mit oder ohne Wiederholungen bilden und wo jede Verbindung so oft wiederholt werden muss, als sich Anordnungen der untern Stellenzahlen zu bestimmten Summen treffen lassen, wir nennen sie **gedoppelte Verbindungen mit oder ohne Wiederholung zu bestimmten Summen**. Die folgenden Untersuchungen haben die Erforschung der Gesetze zum Zwecke, welchen diese letzten Verbindungsarten unterworfen sind, man betrachte sie als einen Versuch zu einer Theorie dieser Verbindungen.

Es bedeute nun

1) $$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\, f(m)\,(1,2,3,..)\right)$$

Digitized by Google

die gedoppelten Verbindungen ohne Wiederholung aus n Elementen zu p Elementen zur Summe m der untern Stellenzahlen aus den Elementen:

$$\begin{array}{l} A_1^{(1)} , A_2^{(1)} , A_3^{(1)} , \ldots . A_{m-p+1}^{(1)} \\ A_1^{(2)} , A_2^{(2)} , A_3^{(2)} , \ldots . A_{m-p+1}^{(2)} \\ A_1^{(3)} , A_2^{(3)} , \ldots \ldots \ldots A_{m-p+1}^{(3)} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ A_1^{(n)} , \ldots \ldots \ldots \ldots A_{m-p+1}^{(n)} . \end{array}$$

Auf gleiche Weise seyen, aus denselben Elementen gebildet,

2) $$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,\int(m)\,(1,2,3,..)\right)$$

die gedoppelten Verbindungen mit Wiederholung aus n Elementen zu p Elementen zur Summe m der untern Stellenzahlen.

Erleiden die untern Stellenzahlen keine Beschränkung, so ist auch ihre Angabe nicht nöthig, es wird alsdann vorausgesetzt, dass die Summe aus $1,2,3,\ldots$ gebildet werde. Für diesen Fall können wir die Bezeichnung abkürzen und bloss setzen,

für die erste Art der Verbindung

3) $$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,\int(m)\right)$$

und für die andere

4) $$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,\int(m)\right)$$

Verschwindet der Unterschied der untern Stellenzahlen, so sind die geordneten Verbindungen ohne Wiederholung aus n Elementen zu p Elementen bezeichnet mit

5) $$A\,(1,2,3,..n)^{(p)}$$

und die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen für dieselben Zahlen durch

6) $$A\,[1,2,3,..n]^{(p)}$$

Lassen wir aber die Verschiedenheit der obern Stellenzahlen verschwinden, so bezeichnen wir die Verbindungen zu bestimmten Summen mit

7) $$A\left(\int(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)}$$

Digitized by Google

Wird $m = 5$, $n = 4$, und $p = 3$, so ist

$$A\left((1,2,3,4)^{(3)}f(5)\right) = A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_2^{(3)} + A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_2^{(4)} + A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_2^{(4)} + A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_2^{(4)}$$
$$A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(3)} + A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(4)} + A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_3^{(4)} + A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_3^{(4)}$$
$$A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_3^{(3)} + A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_3^{(4)} + A_1^{(1)}.A_2^{(3)}.A_3^{(4)} + A_1^{(2)}.A_2^{(3)}.A_3^{(4)}$$
$$A_2^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(3)} + A_2^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(4)} + A_2^{(1)}.A_1^{(3)}.A_3^{(4)} + A_2^{(2)}.A_1^{(3)}.A_3^{(4)}$$
$$A_2^{(1)}.A_2^{(2)}.A_3^{(3)} + A_2^{(1)}.A_2^{(2)}.A_3^{(4)} + A_2^{(1)}.A_2^{(3)}.A_3^{(4)} + A_2^{(2)}.A_2^{(3)}.A_3^{(4)}$$
$$A_3^{(1)}.A_2^{(2)}.A_3^{(3)} + A_3^{(1)}.A_2^{(2)}.A_3^{(4)} + A_3^{(1)}.A_2^{(3)}.A_3^{(4)} + A_3^{(2)}.A_2^{(3)}.A_3^{(4)}$$

Und wenn $n = 3$, $p = 3$, und $m = 4$, so wird

$$A\left([1,2,3]^{(3)}f(4)\right) = A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_1^{(1)} + A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_1^{(1)} + A_2^{(1)}.A_1^{(1)}.A_1^{(1)}$$
$$A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_2^{(2)} + A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_2^{(2)} + A_2^{(1)}.A_1^{(1)}.A_2^{(2)}$$
$$A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_2^{(3)} + A_1^{(1)}.A_2^{(1)}.A_2^{(3)} + A_2^{(1)}.A_1^{(1)}.A_2^{(3)}$$
$$A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_2^{(2)} + A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_2^{(2)} + A_2^{(1)}.A_2^{(2)}.A_2^{(2)}$$
$$A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_2^{(3)} + A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_2^{(3)} + A_2^{(1)}.A_1^{(2)}.A_2^{(3)}$$
$$A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_2^{(3)} + A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_2^{(3)} + A_2^{(1)}.A_2^{(2)}.A_2^{(3)}$$
$$A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_1^{(2)} + A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_1^{(2)} + A_2^{(2)}.A_1^{(2)}.A_1^{(2)}$$
$$A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_2^{(3)} + A_1^{(2)}.A_2^{(2)}.A_2^{(3)} + A_2^{(2)}.A_1^{(2)}.A_2^{(3)}$$
$$A_1^{(2)}.A_2^{(2)}.A_2^{(3)} + A_1^{(2)}.A_2^{(2)}.A_2^{(3)} + A_2^{(2)}.A_2^{(2)}.A_2^{(3)}$$
$$A_1^{(3)}.A_1^{(3)}.A_1^{(3)} + A_1^{(3)}.A_1^{(3)}.A_1^{(3)} + A_2^{(3)}.A_1^{(3)}.A_1^{(3)}$$

Wird $p = 0$, so wird aus 1 und 2 oder 3 und 4 und aus 7

8)
$$A\left((1,2,3,..n)^{(0)}f(m)\right) = 0$$
$$A\left([1,2,3,..n]^{(0)}f(m)\right) = 0$$
$$\text{und } A\left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(0)} = 0$$

Aus den Gleichungen 5 und 6 aber wird in diesem Falle

9)
$$A\,(1,2,3,..n)^{(0)} = 1$$
$$\text{und } A\,[1,2,3,..n]^{(0)} = 1$$

Wird aber in 3, 4 und 7 auch noch $m = 0$, so wird

10)
$$A\left((1,2,3,..n)^{(0)}f(0)\right) = 1$$
$$A\left([1,2,3,..n]^{(0)}f(0)\right) = 1$$
$$\text{und } A\left(f(0)\,(1,2,3..)\right)^{(0)} = 1$$

Digitized by Google

THEORIE
DER GEDOPPELTEN
VERBINDUNGEN
ohne
Wiederholung zu bestimmten Summen.

§. 1.

Die gedoppelten Verbindungen, begriffen in

$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right)$$

können in zwei Theile zerlegt werden, in einen Theil, welcher eine bestimmte obere Stellenzahl nicht enthält, und in einen andern, worin dieselbe vorkömmt. Der erste Theil kann dargestellt werden durch

$$A\left((1,2,3,..s-1,\,s+1,..n)^{(p)}\,f(m)\right)$$

Von dem zweiten Theile kann man das Element $A^{(s)}$ trennen. Nun gibt es Verbindungen, werin $A^{(s)}_{1}$ enthalten ist, andere, in welchen $A^{(s)}_{2}$ steht u. s. w., und zuletzt solche, welche $A^{(s)}_{m-p+1}$ enthalten. Z. B.: Es sey $n = 5$, $p = 3$, $m = 5$ und $s = 3$, so ist

Digitized by Google

$$A\left((1,2,3,4,5)^{(3)}f(5)\right) = A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(4)} + A_1^{(3)} \times A_1^{(1)}.A_3^{(2)} + A_2^{(3)} \times A_1^{(1)}.A_2^{(2)} + A_3^{(3)} \times A_1^{(1)}.A_1^{(2)}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \quad A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_2^{(3)} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \quad A_1^{(1)}.A_1^{(4)}.A_3^{(3)} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \quad A_1^{(2)}.A_1^{(4)}.A_3^{(3)} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \quad A_1^{(1)}.A_3^{(4)} \quad \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \quad A_1^{(1)}.A_3^{(3)} \quad \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \quad A_1^{(2)}.A_3^{(4)} \quad \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \quad A_1^{(2)}.A_3^{(3)} \quad \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \quad A_1^{(4)}.A_3^{(3)} \quad \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \quad A_1^{(1)}.A_2^{(4)} \quad \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \quad A_1^{(1)}.A_2^{(3)} \quad \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \quad A_1^{(2)}.A_2^{(4)} \quad \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \quad A_1^{(2)}.A_2^{(3)} \quad \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \quad A_1^{(4)}.A_2^{(3)} \quad \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array}$$

$$A_1^{(1)}.A_1^{(4)} \quad A_1^{(1)}.A_1^{(3)} \quad A_1^{(2)}.A_1^{(4)} \quad A_1^{(2)}.A_1^{(3)} \quad A_1^{(4)}.A_1^{(3)}$$

Indem wir in dem zweiten Theile diese Elemente sondern, bleiben Klassen von Verbindungen übrig, in welchen die Summe der untern Stellenzahlen nur noch $m-1$, $m-2$,... $p-1$ beträgt, und welche wir bezeichnen können mit

$$A\left((1,2,3,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1)\right),\ A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(m-2)\right),..$$
$$A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(p-1)\right)$$

Verbinden wir diese Ausdrücke mit den fehlenden Elementen, so wird

Digitized by Google

$$11)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p)}f(m)\right)$$
$$+ A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1)\right)\cdot A_1^{(s)}$$
$$+ A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(m-2)\right)\cdot A_2^{(s)}$$
$$+ A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(m-3)\right)\cdot A_3^{(s)}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(p-1)\right)\cdot A_{m-p+1}^{(s)}$$

Diese Gleichung, deren wir uns in der Folge noch oft bedienen müssen, kürzen wir durch Zeichen ab und setzen

$$12)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p)}f(m)\right)$$
$$+ A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A_{1|m-p+1}^{(s)}$$

Lässt man $s = n$ werden, so entsteht

$$13)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,3,..n-1)^{(p)}f(m)\right)$$
$$+ A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}f(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A_{1|m-p+1}^{(n)}$$
$$= A\left((1,2,3,..n-1)^{(p)}f(m)\right)$$
$$+ A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}f(m-1)\right)\cdot A_1^{(n)}$$
$$+ A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}f(m-2)\right)\cdot A_2^{(n)}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}f(p-1)\right)\cdot A_{m-p+1}^{(n)}$$

Diese Gleichung enthält eine zurücklaufende Bestimmung unserer Verbindungen, sie weisst die Verbindungen aus n Elementen zu p Elementen zur Summe m auf die aus $n-1$ Elementen zu p und $p-1$ zur Summe m, $m-1,..p-1$ zurück.

Eine andere, auch in Hinsicht auf p und m zurücklaufende Bildungsweise erhalten wir aus 12. Wir bilden nach der Vorschrift dieser Gleichung die folgenden

Digitized by Google

$$A\left((1,2,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p)}f(m)\right) + A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s)}_{1|m-p+1}$$

$$A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p)}f(m)\right) + A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+1)}_{1|m-p+1}$$

$$A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+3,..n)^{(p)}f(m)\right) + A\left((1,2,..s-1,s+3,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+2)}_{1|m-p+1}$$

. . . . . .

$$A\left((1,2,..s-1,s+h-1,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}f(m)\right) + A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+h-1)}_{1|m-p+1}$$

und vereinigen sie durch Zuzählen, so wird

$$\begin{aligned}14)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) &= A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s)}_{1|m-p+1}\\ &+ A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+1)}_{1|m-p+1}\\ &+ A\left((1,2,..s-1,s+3,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+2)}_{1|m-p+1}\\ &+ \ldots\\ &+ A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+h-1)}_{1|m-p+1}\\ &+ A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}f(m)\right)\end{aligned}$$

Wird hierin $h = n - p$, so wird das letzte Glied

$$\begin{aligned}A\left((1,2,..s-1,s+n-p,..n)^{(p)}f(m)\right) &= A\left((1,2,..s-1,s+n-p+1,..n)^{(p)}f(m)\right)\\ &+ A\left((1,2,..s-1,s+n-p+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+n-p)}_{1|m-p+1}\\ &= 0 + A\left((1,2,..s-1,s+n-p+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+n-p)}_{1|m-p+1}\end{aligned}$$

Mithin

$$\begin{aligned}15)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) &= A\left((1,2,..s-1,s+1..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s)}_{1|m-p+1}\\ &+ A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+1)}_{1|m-p+1}\\ &+ A\left((1,2,..s-1,s+3,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+2)}_{1|m-p+1}\\ &+ \ldots\\ &+ A\left((1,2,..s-1,s+n-p+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(s+n-p)}_{1|m-p+1}\end{aligned}$$

Digitized by Google

Es sey $n = 5$, $p = 3$, $m = 5$ und $s = 3$, so ist

$$A\left((1,2,3,4,5)^{(3)}\,f(5)\right) = A\left((1,2,4,5)^{(2)}\,f(4|2)\right)\cdot A^{(2)}_{1,3} + A\left((1,2,5)^{(1)}\,f(4|2)\right)\cdot A^{(4)}_{1,3} + A\left((1,2)^{(0)}\,f(4|2)\right)\cdot A^{(5)}_{1,3}$$

$$= A\left((1,2,4,5)^{(2)}\,f(4)\right)\cdot A^{(2)}_{1} + A\left((1,2,4,5)^{(2)}\,f(3)\right)\cdot A^{(2)}_{2} + A\left((1,2,4,5)^{(2)}\,f(2)\right)\cdot A^{(2)}_{3}$$
$$+ A\left((1,2,5)^{(1)}\,f(4)\right)\cdot A^{(4)}_{1} + A\left((1,2,5)^{(1)}\,f(3)\right)\cdot A^{(4)}_{2} + A\left((1,2,5)^{(1)}\,f(2)\right)\cdot A^{(4)}_{3}$$
$$+ A\left((1,2)^{(0)}\,f(4)\right)\cdot A^{(5)}_{1} + A\left((1,2)^{(0)}\,f(3)\right)\cdot A^{(5)}_{2} + A\left((1,2)^{(0)}\,f(2)\right)\cdot A^{(5)}_{3}$$

$$= A^{(1)}_1 \cdot A^{(2)}_3 \times A^{(2)}_1 + A^{(1)}_1 \cdot A^{(2)}_2 \times A^{(3)}_2 + A^{(1)}_1 \cdot A^{(2)}_1 \times A^{(3)}_3$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(1)}_1 \cdot A^{(4)}_3 \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ A^{(1)}_1 \cdot A^{(4)}_2 \qquad A^{(1)}_1 \cdot A^{(4)}_1$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(1)}_1 \cdot A^{(3)}_3 \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ A^{(1)}_1 \cdot A^{(3)}_2 \qquad A^{(1)}_1 \cdot A^{(3)}_1$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(2)}_1 \cdot A^{(4)}_3 \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ A^{(2)}_1 \cdot A^{(4)}_2 \qquad A^{(2)}_1 \cdot A^{(4)}_1$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(2)}_1 \cdot A^{(3)}_3 \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ A^{(2)}_1 \cdot A^{(3)}_2 \qquad A^{(2)}_1 \cdot A^{(3)}_1$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(4)}_1 \cdot A^{(4)}_3 \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ A^{(4)}_1 \cdot A^{(3)}_2 \qquad A^{(4)}_1 \cdot A^{(4)}_1$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(3)}_1 \cdot A^{(4)}_3 \qquad + A^{(1)}_1 \cdot A^{(2)}_2 \times A^{(4)}_2 \qquad + A^{(1)}_1 \cdot A^{(2)}_1 \times A^{(4)}_3$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(3)}_1 \cdot A^{(3)}_3 \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ A^{(1)}_1 \cdot A^{(3)}_2 \qquad A^{(1)}_1 \cdot A^{(3)}_1$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(4)}_1 \cdot A^{(3)}_3 \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\ A^{(2)}_1 \cdot A^{(3)}_2 \qquad A^{(2)}_1 \cdot A^{(3)}_1$$

$$+ A^{(1)}_1 \cdot A^{(2)}_3 \times A^{(4)}_1 \qquad + A^{(1)}_1 \cdot A^{(2)}_2 \times A^{(3)}_3 \qquad + A^{(1)}_1 \cdot A^{(2)}_1 \times A^{(3)}_3$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(1)}_1 \cdot A^{(3)}_3$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(2)}_1 \cdot A^{(3)}_3$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\ A^{(3)}_1 \cdot A^{(3)}_3$$

$$+ A^{(1)}_1 \cdot A^{(2)}_3 \times A^{(3)}_1$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

Digitized by Google

Auf gleiche Art wie 15 erhält man die folgende Gleichung.

$$16)\ A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,\ s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(s)}_{1|m-p+1}$$
$$+ A\left((1,2,..s-2,\ s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(s-1)}_{1|m-p+1}$$
$$+ A\left((1,2,..s-3,\ s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(s-2)}_{1|m-p+1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left((1,2,..s-n+p-1,\ s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(1-n+p)}_{1|m-p+1}$$

Wir gehen zu speciellen Fällen über, indem wir dem s bestimmte Werthe beilegen. Es sey in 15 $s = 1$, so ist

$$17)\ A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(1)}_{1|m-p+1}$$
$$+ A\left((3,4,5,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(2)}_{1|m-p+1}$$
$$+ A\left((4,5,6,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(3)}_{1|m-p+1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left((n-p+2,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(n-p+1)}_{1|m-p+1}$$

Eben so sey in 16 $s = n$, so wird

$$18)\ A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..n-1)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(n)}_{1|m-p+1}$$
$$+ A\left((1,2,..n-2)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(n-1)}_{1|m-p+1}$$
$$+ A\left((1,2,..n-3)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(n-2)}_{1|m-p+1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left((1,2,..p-1)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(p)}_{1|m-p+1}$$

Diese Gleichung ist in jeder Hinsicht zurücklaufend, sie weisst die Verbindungs-Klassen aus n Elementen zu p Elementen auf andere zurück aus $n-1$, $n-2$,..$p-1$ Elementen zu $p-1$ und die Summe m auf geringere Summen.

Lässt man die Verschiedenheit der untern Stellenzahlen verschwinden, so erscheint auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens jede Verbindung gleich oft; alle Verbindungen sind daher von demselben

Digitized by Google

Faktor begleitet, welchen wir von beiden Seiten hinwegnehmen können, geschieht dies, so bleibt

$$19)\quad A\,(1,2,3,..n)^{(p)} = A\,(2,3,4,..n)^{(p-1)} \times A^{(1)} + A\,(3,4,5,..n)^{(p-1)} \times A^{(2)} + A\,(4,5,6,..n)^{(p-1)} \times A^{(3)} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + A\,(n-p+2,..n)^{(p-1)} \times A^{(n-p+1)}$$

$$= A\,(1,2,3,..n-1)^{(p-1)} \times A^{(n)} + A\,(1,2,3,..n-2)^{(p-1)} \times A^{(n-1)} + A\,(1,2,3,..n-3)^{(p-1)} \times A^{(n-2)} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + A\,(1,2,3,..p-1)^{(p-1)} \times A^{(p)}.$$

Auf diese Weise sind wir also zu den bekannten Vorschriften zur Bildung der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen gelangt; sie sind ganz specielle Fälle unserer Gleichungen 15 und 16. Die Gleichungen 19 können dienen, die Anzahl der geordneten Verbindungen aus n zu p Elementen aufzufinden. Wir setzen, es sey diese Anzahl $= (n,p)$, so ist nach 19

$$(n,p) = (n-1,\,p-1) + (n-2,\,p-1) + (n-3,\,p-1) + \cdot\cdot + (p-1,\,p-1)$$

Nun ist $(n,1) = n$, mithin, wenn wir in die vorstehende Gleichung $p = 2$ setzen,

$$(n,2) = (n-1,\,1) + (n-2,\,1) + (n-3,\,1) + \cdot\cdot + (1,1)$$

$$= \frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{1} + \frac{n-3}{1} + \cdot\cdot\cdot + \frac{1}{1}$$

$$= \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2} = \frac{n^{\underline{2}}}{1^{\underline{2}}}$$

Setzen wir $p = 3$, so wird

Digitized by Google

$$(n,3) = (n-1,2) + (n-2,2) + (n-3,2) + .. + (2,2)$$
$$= \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|}} + \frac{(n-2)^{2|-1}}{1^{2|}} + \frac{(n-3)^{2|-1}}{1^{2|}} + .. + \frac{2^{2|-1}}{1^{2|}}$$
$$= \frac{n^{3|-3}}{1^{3|}}$$

Ganz allgemein ergibt sich

$$(n,p) = \frac{(n-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}} + \frac{(n-2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}} + \frac{(n-3)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}} + .. + \frac{(p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}}$$
$$= \frac{n^{p|-p}}{1^{p|}}$$

Mithin aus n Elementen zu p Elementen die

20) Anzahl der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen $= \frac{n^{p|-p}}{1^{p|}}$

Wir können jetzt zu einem andern besondern Falle übergehen und in 18 die obern Stellenzahlen gleich werden lassen. In diesem Falle erscheint jede Verbindung dieser Gleichung auf beiden Seiten so oft, als sich geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen aus den vorhandenen Elementen zu einer bestimmten Anzahl Elemente bilden lassen. Machen wir daher von der Gleichung 20 Gebrauch, so geht 18, wenn die Verschiedenheit der obern Stellenzahlen verschwindet, über in

$$\frac{n^{p|-p}}{1^{p|}} \cdot A\left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(p)} = \frac{(n-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}} \cdot A\left(f(m-1|p-1)(1,2,3,..)\right)^{(p-1)} \cdot A_{1|m-p+1}$$
$$+ \frac{(n-2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}} \cdot A\left(f(m-1|p-1)(1,2,3,..)\right)^{(p-1)} \cdot A_{1|m-p+1}$$
$$+ \frac{(n-3)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}} \cdot A\left(f(m-1|p-1)(1,2,3,..)\right)^{(p-1)} \cdot A_{1|m-p+1}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \frac{(p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}} \cdot A\left(f(m-1|p-1)(1,2,3,..)\right)^{(p-1)} \cdot A_{1|m-p+1}$$

Da nun die Glieder zur Rechten des Gleichheitszeichens sämmtlich gleich und nur mit verschiedenen Vorzahlen behaftet sind, so zählen wir diese zusammen. Nun ist

Digitized by Google

$$\frac{(p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} + \frac{(p+1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} + \ldots + \frac{(n-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} = \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}$$

und wenn wir die gleichen Faktoren auf beiden Seiten vernachlässigen,

$$21)\quad A\left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(p)} = A\left(f(m-1|p-1)(1,2,3,..)\right)^{(p-1)} \cdot A_{1|m-p+1}$$

$$= A\left(f(m-1)(1,2,3,..)\right)^{(p-1)} \cdot A_1$$
$$+ A\left(f(m-2)(1,2,3,..)\right)^{(p-1)} \cdot A_2$$
$$+ A\left(f(m-3)(1,2,3,..)\right)^{(p-1)} \cdot A_3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left(f(p-1)(1,2,3,..)\right)^{(p-1)} \cdot A_{m-p+1}$$

Hier erhalten wir wieder eine bekannte Vorschrift, nämlich die zur Bildung der Verbindungen zu bestimmten Summen; wir wollen sie benutzen, um die Anzahl dieser Verbindungen aufzufinden. Es sey die Anzahl derselben begriffen in $A\left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(p)} = (m,p)_1$, so ist

$$(m,p)_1 = (m-1,p-1)_1 + (m-2,p-1)_1 + (m-3,p-1)_1 + \ldots + (p-1,p-1)_1$$

Beachten wir, dass $(m,1)_1 = 1$ und setzen $p = 2$, so wird

$$(m,2)_1 = (m-1,1)_1 + (m-2,1)_1 + (m-3,1)_1 + \ldots + (1,1)_1$$
$$= 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$$
$$= \frac{m-1}{1}$$

Setzen wir $p = 3$, so entsteht

$$(m,3)_1 = (m-1,2)_1 + (m-2,2)_1 + (m-3,2)_1 + \ldots + (2,2)_1$$
$$= \frac{m-2}{1} + \frac{m-3}{1} + \frac{m-4}{1} + \ldots + \frac{1}{1}$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} = \frac{(m-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}$$

Ist $p = 4$, so erhält man

Digitized by Google

$$(m,4)_1 = (m-1,3)_1 + (m-2,3)_1 + (m-3,3)_1 + \ldots + (3,3)_1$$
$$= \frac{(m-2)^{3|-1}}{1^{3|1}} + \frac{(m-3)^{3|-1}}{1^{3|1}} + \frac{(m-4)^{3|-1}}{1^{3|1}} + \ldots + \frac{2^{3|-1}}{1^{3|1}}$$
$$= \frac{(m-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}$$

Und ganz allgemein

$$(m,p)_1 = \frac{(m-2)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} + \frac{(m-3)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} + \ldots + \frac{(p-2)^{p-2|-1}}{1^{p-2,1}}$$
$$= \frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

Mithin

22) Anzahl der Verbindungen begriffen in

$$A^{\sim}\left(\int(m)\,(1,2,3,\ldots)\right)^{(p)} = \frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

Und nun auch

23) Anzahl der Verbindungen begriffen in

$$A\left((1,2,3,\ldots n)^{(p)}\int(m)\right) = \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

§. 2.

Die Gleichung 11 weisst die gedoppelten Verbindungen, gebildet aus n Elementen, auf die aus n−1 Elementen zurück. Wir gehen weiter, indem wir nach dem Gesetze 11 ein neues Element aus den anfänglichen Verbindungen heben und so ihre Bildung auf eine noch geringere Anzahl von Elementen zurückbringen. Zu diesem Zwecke bilden wir die Gleichungen

Digitized by Google

$$A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p)}f(m)\right)$$
$$+ A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right).A^{(s+1)}_{\cdot|m-p+1}$$

$$A^{(s)}_{\cdot}.A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(m-1)\right).A^{(s)}_{\cdot}$$
$$+ A\left((1,2..s-1,s+2,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right).A^{(s+1)}_{\cdot|m-p+1}.A^{(s)}_{\cdot}$$

$$A^{(s)}_{\cdot}.A\left((1,2,..s-1,s+1..n)^{(p-1)}f(m-2)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(m-2)\right).A^{(s)}_{\cdot}$$
$$+ A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-2)}f(m-3|p-2)\right).A^{(s+1)}_{\cdot|m-p}.A^{(s)}_{\cdot}$$

. . . . . .

$$A^{(s)}_{m-p+1}.A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(p-1)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(p-1)\right).A^{(s)}_{m-p+1}$$
$$+ A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-2)}f(p-2)\right).A^{(s+1)}_{\cdot}.A^{(s)}_{m-p+1}$$

zählen sie zusammen und erhalten

$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p)}f(m)\right)$$
$$+ \begin{matrix} A^{(s)}_{\cdot} \\ A^{(s+1)}_{\cdot} \end{matrix} \Big| A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(m-1)\right)$$
$$+ \begin{matrix} A^{(s)}_{\cdot} \\ A^{(s+1)}_{\cdot} \end{matrix} \Big| A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(m-2)\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \begin{matrix} A^{(s)}_{m-p+1} \\ A^{(s+1)}_{m-p+1} \end{matrix} \Big| A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(p-1)\right)$$
$$+ A^{(s)}_{\cdot}.A^{(s+1)}_{\cdot} \Big| A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-2)}f(m-2)\right)$$
$$+ \begin{matrix} A^{(s)}_{\cdot} \\ \cdot \end{matrix} . \begin{matrix} A^{(s+1)}_{\cdot} \\ \cdot \end{matrix} \Big| A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-2)}f(m-3)\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \begin{matrix} A^{(s)}_{\cdot} \\ \cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ m-p+1 \end{matrix} . \begin{matrix} A^{(s+1)}_{m-p+1} \\ \cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot \end{matrix} \Big| A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-2)}f(p-2)\right)$$

Wir können das Gesetz dieser Gleichung durch folgende Zeichen darstellen:

Digitized by Google

$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+2..n)^{(p)}f(m)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right)\cdot A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right)\cdot A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$

Auf gleiche Weise lässt sich das Element $A^{(s+2)}$ trennen und man erhält

$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,..s-1,s+3,..n)^{(p)}f(m)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1,s+2)^{(1)}f(1|m-p+1)\right)\cdot A\left((1,2,..s-1,s+3,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1,s+2)^{(2)}f(2|m-p+2)\right)\cdot A\left((1,2,..s-1,s+3,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1,s+2)^{(3)}f(3|m-p+3)\right)\cdot A\left((1,2,..s-1,s+3,..n)^{(p-3)}f(m-3|p-3)\right)$$

Ganz allgemein ist, wenn h Elemente getrennt werden.

24) $A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) =$

$$= A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(o)}\ f\ (o|m-p)\right)\cdot A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}\ f(m|p)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right)\cdot A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right)\cdot A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(p)}\ f\ (p|m)\right)\cdot A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(o)}\ f\ (m-p|o)\right)$$

Diese Reihe bricht mit dem Gliede

$$A\left((s,s+1..s+h-1)^{(h)}f(h|m-p+h)\right)\cdot A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p-h)}f(m-h|p-h)\right)$$

ab, wenn h kleiner als p ist.

Es sey z. B. $n=6$, $p=4$, $m=6$, $s=3$ und $h=2$, so ist

$$A\left((1,2,3,4,5,6)^{(4)}f(6)\right) = A\left((3,4)^{(0)}f(0|2)\right)\cdot A\left((1,2,5,6)^{(4)}f(6|4)\right)$$
$$+ A\left((3,4)^{(1)}f(1|3)\right)\cdot A\left((1,2,5,6)^{(3)}f(5|3)\right)$$
$$+ A\left((3,4)^{(2)}f(2|4)\right)\cdot A\left((1,2,5,6)^{(2)}f(4|2)\right)$$
$$= A\left((1,2,5,6)^{(4)}f(6)\right)$$
$$+ A\left((3,4)^{(1)}f(1)\right)\cdot A\left((1,2,5,6)^{(3)}f(5)\right) + A\left((3,4)^{(1)}f(2)\right)\cdot A\left((1,2,5,6)^{(3)}f(4)\right)$$
$$+ A\left((3,4)^{(1)}f(3)\right)\cdot A\left((1,2,5,6)^{(2)}f(3)\right) + A\left((3,4)^{(2)}f(2)\right)\cdot A\left((1,2,5,6)^{(2)}f(4)\right)$$
$$+ A\left((3,4)^{(2)}f(3)\right)\cdot A\left((1,2,5,6)^{(1)}f(3)\right) + A\left((3,4)^{(2)}f(4)\right)\cdot A\left((1,2,5,6)^{(1)}f(2)\right)$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{cccc}
A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_1^{(3)} & A_3^{(6)} \\
1 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 3 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 1 \\
2 & 2 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
+ A_1^{(3)} \times \begin{array}{c|ccc}
A_1^{(4)} & A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_3^{(5)} \\
 & 1 & 2 & 2 \\
 & 1 & 3 & 1 \\
 & 2 & 1 & 2 \\
 & 2 & 2 & 1 \\
 & 3 & 1 & 1 \\
 & A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_3^{(6)} \\
 & 1 & 2 & 2 \\
 & 1 & 3 & 1 \\
 & 2 & 1 & 2 \\
 & 2 & 2 & 1 \\
 & 3 & 1 & 1 \\
 & A_1^{(1)} & A_1^{(3)} & A_3^{(6)} \\
 & 1 & 2 & 2 \\
 & 1 & 3 & 1 \\
 & 2 & 1 & 2 \\
 & 2 & 2 & 1 \\
 & 3 & 1 & 1 \\
 & A_1^{(2)} & A_1^{(3)} & A_3^{(6)} \\
 & 1 & 2 & 2 \\
 & 1 & 3 & 1 \\
 & 2 & 1 & 2 \\
 & 2 & 2 & 1 \\
 & 3 & 1 & 1
\end{array}
+ A_2^{(3)} \times \begin{array}{c|ccc}
A_2^{(4)} & A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_2^{(5)} \\
 & 1 & 2 & 1 \\
 & 2 & 1 & 1 \\
 & A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_2^{(6)} \\
 & 1 & 2 & 1 \\
 & 2 & 1 & 1 \\
 & A_1^{(1)} & A_1^{(3)} & A_2^{(6)} \\
 & 1 & 2 & 1 \\
 & 2 & 1 & 1 \\
 & A_1^{(2)} & A_1^{(3)} & A_2^{(6)} \\
 & 1 & 2 & 1 \\
 & 2 & 1 & 1
\end{array}
+ A_3^{(3)} \times \begin{array}{c|ccc}
A_3^{(4)} & A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_1^{(5)} \\
 & A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_1^{(6)} \\
 & A_1^{(1)} & A_1^{(3)} & A_1^{(6)} \\
 & A_1^{(2)} & A_1^{(3)} & A_1^{(6)}
\end{array}
$$

$$
+ A_1^{(3)} \cdot A_1^{(4)} \times \begin{array}{c|cc}
 & A_1^{(1)} & A_3^{(5)} \\
 & 2 & 2 \\
 & 3 & 1 \\
 & A_1^{(1)} & A_3^{(5)} \\
 & 2 & 2 \\
 & 3 & 1 \\
 & A_1^{(1)} & A_3^{(6)} \\
 & 2 & 2 \\
 & 3 & 1 \\
 & A_1^{(2)} & A_3^{(5)} \\
 & 2 & 2 \\
 & 3 & 1 \\
 & A_1^{(2)} & A_3^{(6)} \\
 & 2 & 2 \\
 & 3 & 1 \\
 & A_1^{(3)} & A_3^{(6)} \\
 & 2 & 2 \\
 & 3 & 1
\end{array}
+ A_1^{(3)} \cdot A_2^{(4)} \times \begin{array}{c|cc}
 & A_1^{(1)} & A_2^{(5)} \\
 & 2 & 1 \\
 & A_1^{(1)} & A_2^{(5)} \\
 & 2 & 1 \\
 & A_1^{(1)} & A_2^{(6)} \\
 & 2 & 1 \\
 & A_1^{(2)} & A_2^{(5)} \\
 & 2 & 1 \\
 & A_1^{(2)} & A_2^{(6)} \\
 & 2 & 1 \\
 & A_1^{(3)} & A_2^{(6)} \\
 & 2 & 1
\end{array}
+ A_1^{(3)} \cdot A_3^{(4)} \times \begin{array}{c|cc}
 & A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\
 & A_1^{(1)} & A_1^{(5)} \\
 & A_1^{(1)} & A_1^{(6)} \\
 & A_1^{(2)} & A_1^{(5)} \\
 & A_1^{(2)} & A_1^{(6)} \\
 & A_1^{(5)} & A_1^{(6)}
\end{array}
$$

Digitized by Google

Auf gleiche Weise wie 24, oder indem man $s = s-h+1$ setzt, findet man die folgende Gleichung,

25)
$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right) =$$
$$= A\left((s-h+1, s-h+2,..s)^{(o)}\,f\,(o|m-p)\right).A\left((1,2,..s-h, s+1,..n)^{(p)}\,f\,(m|p)\right)$$
$$+A\left((s-h+1, s-h+2,..s)^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right).A\left((1,2,..s-h, s+1,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)$$
$$+A\left((s-h+1, s-h+2,..s)^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right).A\left((1,2,..s-h, s+1,..n)^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \;.$$
$$+A\left((s-h+1, s-h+2,..s)^{(p)}\;\;f\;(p|m)\right).A\left((1,2,..s-h, s+1,..n)^{(o)}\,f\,(m-p|o)\right)$$

Die beiden zurücklaufenden Bildungsweisen 24 und 25 weisen die Bildung unserer Verbindungen aus n Elementen auf die aus h und n−h zurück. Wir haben die Elemente ihrer Folge nach $s, s+1,..s+h-1$ oder $s-h+1, s-h+2,..s$ aus ihren ursprünglichen Verbindungen gehoben, dies geschah der leichteren Bezeichnung wegen. Es knüpft sich dieses Trennen der Elemente an keine vorgeschriebene Ordnung, sondern es ist ganz willkührlich.

Wir gehen nun zu speciellen Fällen über und setzen in 24 $s = 1$, so wird

26)
$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right) =$$
$$= A\left((1,2,3,..h)^{(o)}\,f\,(o|m-p)\right).A\left((h+1, h+2,..n)^{(p)}\,f\,(m|p)\right)$$
$$+A\left((1,2,3,..h)^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right).A\left((h+1, h+2,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)$$
$$+A\left((1,2,3,..h)^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right).A\left((h+1, h+2,..n)^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \;.$$
$$+A\left((1,2,3,..h)^{(p)}\;\;f\;(p|m)\right).A\left((h+1, h+2,..n)^{(o)}\;f\;(m-p|o)\right)$$

Setzen wir ferner in 25 $s = n$, so entsteht

Digitized by Google

27) $$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) =$$

$$= A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(o)}f(o|m-p)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-h)^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$+ A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(1)}f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-h)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(2)}f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-h)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(p)}f(p|m)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-h)^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

Lässt man in den Gleichungen 24 — 27 die Verschiedenheit der untern Stellenzahlen verschwinden, so ist die $(x+1)$te Horizontalreihe z. B. in 26

$$= A\left((1,2,3,..h)^{(x)}f(x)\right) \cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-x)}f(m-x)\right)$$
$$+ A\left((1,2,3,..h)^{(x)}f(x+1)\right) \cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-x)}f(m-x-1)\right)$$
$$+ A\left((1,2,3,..h)^{(x)}f(x+2)\right) \cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-x)}f(m-x-2)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ A\left((1,2,3,..h)^{(x)}f(m-p+x)\right) \cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-x)}f(p-x)\right)$$

$$= A(1,2,3,..h)^{(x)} \cdot A(h+1,h+2,..n)^{(n-x)} \cdot \Big(\frac{(x-1)^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}} \cdot \frac{(m-x-1)^{p-x-1|-1}}{1^{p-x-1|1}}$$
$$+ \frac{x^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}} \cdot \frac{(m-x-2)^{p-x-1|-1}}{1^{p-x-1|1}}$$
$$+ \frac{(x+1)^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}} \cdot \frac{(m-x-3)^{p-x-1|-1}}{1^{p-x-1|1}}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \frac{(m-p+x-1)^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}} \cdot \frac{(p-x-1)^{p-x-1|-1}}{1^{p-x-1|1}} \Big)$$

$$= A(1,2,3,..h)^{(x)} \cdot A(h+1,h+2,..n)^{(n-x)} \cdot \frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

Da der Ausdruck für die Summe der eingeklammerten Reihe kein x mehr enthält, so sind auch alle Horizontalreihen von demselben Faktor $\frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$ begleitet, derselbe entsteht gleichfalls auf der linken Seite des Zeichens, so dass nach dessen Hinwegnahme bleibt, nach 24 (394 der Analysis)

Digitized by Google

28) $A\,(1,2,3,..n)^{(p)} = A\,(s,s+1,..s+h-1)^{(o)} \cdot A\,(1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}$
$+ A\,(s,s+1,..s+h-1)^{(1)} \cdot A\,(1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p-1)}$
$+ A\,(s,s+1,..s+h-1)^{(2)} \cdot A\,(1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p-2)}$
$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$
$+ A\,(s,s+1,..s+h-1)^{(p)} \cdot A\,(1,2,..s-1,s+h,..n)^{(o)}$

Nach 25

29) $= A\,(s-h+1,s-h+2,..s)^{(o)} \cdot A\,(1,2,..s-h,s+1,..n)^{(p)}$
$+ A\,(s-h+1,s-h+2,..s)^{(1)} \cdot A\,(1,2,..s-h,s+1,..n)^{(p-1)}$
$+ A\,(s-h+1,s-h+2,..s)^{(2)} \cdot A\,(1,2,..s-h,s+1,..n)^{(p-2)}$
$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$
$+ A\,(s-h+1,s-h+2,..s)^{(p)} \cdot A\,(1,2,..s-h,s+1,..n)^{(o)}$

Nach 26

30) $= A\,(1,2,3,..h)^{(o)} \cdot A\,(h+1,h+2,..n)^{(p)}$
$+ A\,(1,2,3,..h)^{(1)} \cdot A\,(h+1,h+2,..n)^{(p-1)}$
$+ A\,(1,2,3,..h)^{(2)} \cdot A\,(h+1,h+2,..n)^{(p-2)}$
$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$
$+ A\,(1,2,3,..h)^{(p)} \cdot A\,(h+1,h+2,..n)^{(o)}$

Nach 27

31) $= A\,(n-h+1,n-h+2,..n)^{(o)} \cdot A\,(1,2,3,..n-h)^{(p)}$
$+ A\,(n-h+1,n-h+2,..n)^{(1)} \cdot A\,(1,2,3,..n-h)^{(p-1)}$
$+ A\,(n-h+1,n-h+2,..n)^{(2)} \cdot A\,(1,2,3,..n-h)^{(p-2)}$
$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$
$+ A\,(n-h+1,n-h+2,..n)^{(p)} \cdot A\,(1,2,3,..n-h)^{(o)}$

§. 3.

Die Gleichung 24 ist noch einer Erweiterung fähig, sie kann noch allgemeiner gemacht werden. Während die Anzahl der Elemente in den Verbindungen sich gleich bleibt, in den einen h, den andern n−h,

Digitized by Google

wechseln die Exponenten und die Summen. Wir wollen einen solchen Wechsel auch in der Zahl der Elemente eintreten lassen, es soll auch h sich verändern.

Wir verbinden die Gleichungen 24 und 11, und ersetzen in 24 nach der Vorschrift 11 alle Glieder vom 2ten an, welche das Element $A^{(s+h)}$ noch enthalten, durch andere, worin es nicht mehr vorkömmt. Diese Substitution führt zu der Gleichung

$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\int(m)\right) =$$

$$= A\left((s,s+1,..s+h-2)^{(o)}\int(o|m-p)\right).A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}\int(m|p)\right)$$

$$+A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}\int(1|m-p+1)\right).A\left((1,2,..s-1,s+h+1,..n)^{(p-1)}\int(m-1|p-1)\right)$$

$$+A_{1}^{(s+h)}.A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}\int(1)\right)\left|\begin{array}{l}A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(2)}\int(2)\right)\end{array}\right|A\left((1,2,..s-1,s+h+1,..n)^{(p-2)}\int(m-2)\right)$$

$$+A_{1}^{(s+h)}.A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}\int(1)\right)\left|\begin{array}{l}A_{1}^{(s+h)}.A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}\int(2)\right)\\A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}\int(3)\right)\end{array}\right|A\left((1,2,..s-1,s+h+1,..n)^{(p-3)}\int(m-3)\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\

Vom zweiten Gliede dieser Gleichung an können wir jetzt wieder durch alle Glieder das Element $A^{(\sigma+h+1)}$ aus seinen ursprünglichen Verbindungen heben und mit den andern Verbindungs-Klassen vereinigen, es geschieht dies auf dieselbe Weise, wie es vorhin angegeben ist, und man erhält

$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\int(m)\right) =$$

$$= A\left((s,s+1,..s+h-2)^{(o)}\int(o|m-p)\right).A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}\int(m|p)\right)$$
$$+A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}\int(1|m-p+1)\right).A\left((1,2,..s-1,s+h+1,..n)^{(p-1)}\int(m-1|p-1)\right)$$
$$+A\left((s,s+1,..s+h)^{(2)}\int(2|m-p+2)\right).A\left((1,2,..s-1,s+h+2,..n)^{(p-2)}\int(m-2|p-2)\right)$$
$$+A\left((s,s+1,..s+h+1)^{(3)}\int(3|m-p+3)\right).A\left((1,2,..s-1,s+h+2,..n)^{(p-3)}\int(m-3|p-3)\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+A\left((s,s+1,..s+h+1)^{(p)}\int(p|m)\right).A\left((1,2,s-1,s+h+2,..n)^{(o)}\int(m-p|o)\right)$$

In dieser Gleichung muss man jetzt vom 4ten Gliede an abwärts aus allen anfänglichen Verbindungen das Element $A^{(\sigma+h+1)}$ wegbringen u. s. w. Setzt man dieses Geschäft so fort, so erhält man zuletzt

32) $$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\int(m)\right) =$$

$$= A\left((s,s+1,..s+h-2)^{(o)}\int(o|m-p)\right).A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}\int(m|p)\right)$$
$$+A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}\int(1|m-p+1)\right).A\left((1,2,..s-1,s+h+1,..n)^{(p-1)}\int(m-1|p-1)\right)$$
$$+A\left((s,s+1,..s+h)^{(2)}\int(2|m-p+2)\right).A\left((1,2,..s-1,s+h+2,..n)^{(p-2)}\int(m-2|p-2)\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+A\left((s,s+1,..s+h+p-2)^{(p)}\int(p|m)\right).A\left((1,2,..s-1,s+h+p,..n)^{(o)}\int(m-p|o)\right)$$

Z. B. es sey wieder $n = 6$, $p = 4$, $m = 6$, $s = 3$, $h = 2$, so ist

$$A\left((1,2,3,4,5,6)^{(4)}\int(6)\right) = A\left((3)^{(o)}\int(o|2)\right).A\left((1,2,5,6)^{(4)}\int(6|4)\right)$$
$$+A\left((3,4)^{(1)}\int(1|3)\right).A\left((1,2,6)^{(3)}\int(5|3)\right)$$
$$+A\left((3,4,5)^{(2)}\int(2|4)\right).A\left((1,2)^{(2)}\int(4|2)\right)$$
$$+A\left((3,4,5,6)^{(3)}\int(3|5)\right).A\left((1,2)^{(1)}\int(3|1)\right)$$
$$+A\left((3,4,5,6)^{(4)}\int(4|6)\right).A\left((1,2)^{(o)}\int(2|o)\right)$$

Digitized by Google

$$= A\left((1,2,5,6)^{(4)}\,f(6)\right)$$
$$+ A\left((3,4)^{(1)}f(1)\right)\cdot A\left((1,2,6)^{(2)}\,f(5)\right) + A\left((3,4)^{(1)}f(2)\right)\cdot A\left((1,2,6)^{(2)}\,f(4)\right)$$
$$+ A\left((3,4)^{(1)}f(3)\right)\cdot A\left((1,2,6)^{(2)}\,f(3)\right) + A\left((3,4,5)^{(2)}\,f(2)\right)\cdot A\left((1,2)^{(2)}f(4)\right)$$
$$+ A\left((3,4,5)^{(2)}\,f(3)\right)\cdot A\left((1,2)^{(1)}f(3)\right) + A\left((3,4,5)^{(2)}\,f(4)\right)\cdot A\left((1,2)^{(2)}f(2)\right)$$
$$+ A\left((3,4,5,6)^{(3)}f(3)\right)\cdot A\left((1,2)^{(1)}f(3)\right) + A\left((3,4,5,6)^{(3)}f(4)\right)\cdot A\left((1,2)^{(1)}f(2)\right)$$
$$+ A\left((3,4,5,6)^{(3)}f(5)\right)\cdot A\left((1,2)^{(1)}f(1)\right) + A\left((3,4,5,6)^{(4)}f(6)\right)$$

$$= A_1^{(1)}\cdot A_1^{(2)}\cdot A_1^{(3)}\cdot A_3^{(6)}$$

1	1	2	2
1	1	3	1
1	2	1	2
1	2	2	1
1	3	1	1
2	1	1	2
2	1	2	1
2	2	1	1
3	1	1	1

$$+ A_1^{(3)}\times\begin{vmatrix} A_1^{(1)}\cdot A_1^{(2)}\cdot A_3^{(6)} \\ A_1^{(4)} \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix} + A_2^{(3)}\times\begin{vmatrix} A_1^{(1)}\cdot A_1^{(2)}\cdot A_2^{(6)} \\ A_2^{(4)} \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix} + A_3^{(3)}\times\begin{vmatrix} A_1^{(1)}\cdot A_1^{(2)}\cdot A_1^{(6)} \\ A_3^{(4)} \end{vmatrix}$$

$$+ A_1^{(3)}\cdot A_1^{(4)}\times\begin{vmatrix} A_1^{(1)}\cdot A_3^{(6)} \\ A_1^{(3)}\cdot A_1^{(5)} \\ A_1^{(4)}\cdot A_1^{(5)} \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} + A_1^{(3)}\cdot A_2^{(4)}\times\begin{vmatrix} A_1^{(1)}\cdot A_2^{(6)} \\ A_1^{(3)}\cdot A_2^{(5)} \\ A_1^{(4)}\cdot A_2^{(5)} \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} + A_1^{(3)}\cdot A_3^{(4)}\times\begin{vmatrix} A_1^{(1)}\cdot A_2^{(6)} \\ A_1^{(3)}\cdot A_3^{(5)} \\ A_1^{(4)}\cdot A_3^{(5)} \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

Digitized by Google

$$+ A_1^{(3)} . A_1^{(4)} . A_1^{(5)} \times A_3^{(1)} + A_1^{(3)} . A_1^{(4)} . A_2^{(5)} \times A_2^{(1)} + A_1^{(3)} . A_1^{(4)} . A_3^{(5)} \times A_1^{(1)}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(3)} . A_1^{(4)} . A_1^{(6)} \\ A_1^{(3)} . A_1^{(5)} . A_1^{(6)} \\ A_1^{(4)} . A_1^{(5)} . A_1^{(6)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$A_1^{(3)} . A_1^{(4)} . A_2^{(6)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$A_1^{(3)} . A_1^{(5)} . A_2^{(6)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$A_1^{(4)} . A_1^{(5)} . A_2^{(6)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$A_1^{(3)} . A_1^{(4)} . A_3^{(6)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$A_1^{(3)} . A_1^{(5)} . A_3^{(6)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$A_1^{(4)} . A_1^{(5)} . A_3^{(6)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$+ A_1^{(3)} . A_1^{(4)} . A_1^{(5)} . A_3^{(6)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Auf dieselbe Weise erhält man auch folgende Gleichung:

Digitized by Google

33) $A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left((s-h+2, s-h+3,..s)^{(o)}f(o|m-p)\right) . A\left((1,2,..s-h, s+1,..n)^{(p)} f (m|p)\right)$

$+ A\left((s-h+1, s-h+2,..s)^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left((1,2,..s-h-1, s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left((s-h, s-h+1,..s)^{(2)}f(2|m-p+2)\right) . A\left((1,2,..s-h-2, s+1,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$+ . . . . . .$

$+ A\left((s-h-p+2, s-h-p+3,..s)^{(p)}f(p|m)\right) . A\left((1,2,..s-h-p, s+1,..n)^{(o)}f(m-p|o)\right)$

Wir gehen zu speciellen Fällen über und setzen in 32 $s=1$ und erhalten

34) $A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left((1,2,3,..h-1)^{(o)} f (o|m-p)\right) . A\left((h+1, h+2,..n)^{(p)} f (m|p)\right)$

$+ A\left((1,2,3,..h)^{(1)} f (1|m-p+1)\right) . A\left((h+2, h+3,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left((1,2,3,..h+1)^{(2)} f (2|m-p+2)\right) . A\left((h+3, h+4,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$+ . . . . . .$

$+ A\left((1,2,3,..h+p-1)^{(p)} f (p|m)\right) . A\left((h+p+1, h+p+2,..n)^{(o)}f(m-p|o)\right)$

Wir setzen ferner in 33 $s=n$ und erhalten

35) $A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left((n-h+2, n-h+3,..n)^{(o)} f (o|m-p)\right) . A\left((1,2,3,..n-h)^{(p)} f (m|p)\right)$

$+ A\left((n-h+1, n-h+2,..n)^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left((1,2,3,..n-h-1)^{(p-1)} f (m-1|p-1)\right)$

$+ A\left((n-h, n-h+1,..n)^{(2)} f (2|m-p+2)\right) . A\left((1,2,3,..n-h-2)^{(p-2)} f (m-2|p-2)\right)$

$+ . . . . . .$

$+ A\left((n-h-p+2, n-h-p+3,..n)^{(p)}f(p|m)\right) . A\left((1,2,3,..n-h-p)^{(o)} f (m-p|o)\right)$

Wir können den Gleichungen 32 und 33 auch folgende Form geben:

36) $A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left((s+1, s+2,..s+h-1)^{(o)}f(o|m-p)\right) . A\left((1,2,..s-1, s+h,..n)^{(p)} f (m|p)\right)$

$+ A\left((s, s+1,..s+h-1)^{(1)} f (1|m-p+1)\right) . A\left((1,2,..s-2, s+h,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left((s-1, s,..s+h-1)^{(2)} f (2|m-p+2)\right) . A\left((1,2,..s-3, s+h,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$+ . . . . . .$

$+ A\left((s-p+1, s-p+2,..s+h-1)^{(p)}f(p|m)\right) . A\left((1,2,..s-p-1, s+h,..n)^{(o)}f(m-p|o)\right)$

Digitized by Google

37) $A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,\int(m)\right) =$

$= A\left((s-h+1,s-h+2,..s-1)^{(o)}\int(o|m-p)\right) . A\left((1,2,..s-h,s+1,..n)^{(p)}\,\int(m|p)\right)$

$+ A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(1)}\int(1|m-p+1)\right) . A\left((1,2,..s-h,s+2,..n)^{(p-1)}\int(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left((s-h+1,s-h+2,..s+1)^{(2)}\int(2|m-p+2)\right) . A\left((1,2,..s-h,s+3,..n)^{(p-2)}\int(m-2|p-2)\right)$

$+ . . . . . , ...$

$+ A\left((s-h+1,s-h+2,..s+p-1)^{(p)}\int(p|m)\right) . A\left((1,2,..s-h,s+p+1,..n)^{(o)}\int(m-p|o)\right)$

Wir gehen zu specielleren Fällen über, indem wir die unteren Stellenzahlen gleich werden lassen.

Es wird aus 32

38) $A\,(1,2,3,..n)^{(p)} = A\,(s,s+1,..s+h-2)^{(o)} . A\,(1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}$

$+ A\,(s,s+1,..s+h-1)^{(1)} . A\,(1,2,..s-1,s+h+1,..n)^{(p-1)}$

$+ A\,(s,s+1,..s+h)^{(2)} . A\,(1,2,..s-1,s+h+2,..n)^{(p-2)}$

$+ . . . . . .$

$+ A\,(s,s+1,..s+h+p-2)^{(p)} . A\,(1,2,..s-1,s+h+p,..n)^{(o)}$

Aus 33 entsteht

39) $= A\,(s-h+2,s-h+3,..s)^{(o)} . A\,(1,2,..s-h,s+1,..n)^{(p)}$

$+ A\,(s-h+1,s-h+2,..s)^{(1)} . A\,(1,2,..s-h-1,s+1,..n)^{(p-1)}$

$+ A\,(s-h,s-h+1,..s)^{(2)} . A\,(1,2,..s-h-2,s+1,..n)^{(p-2)}$

$+ . . . . . .$

$+ A\,(s-h-p+2,s-h-p+3,..s)^{(p)} . A\,(1,2,..s-h-p,s+1,..n)^{(o)}$

Aus 36 wird

40) $= A\,(s+1,s+2,..s+h-1)^{(o)} . A\,(1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}$

$+ A\,(s,s+1,..s+h-1)^{(1)} . A\,(1,2,..s-2,s+h,..n)^{(p-1)}$

$+ A\,(s-1,s,..s+h-1)^{(2)} . A\,(1,2,..s-3,s+h,..n)^{(p-2)}$

$+ . . . . . .$

$+ A\,(s-p+1,s-p+2,..s+h-1)^{(p)} . A\,(1,2,..s-p-1,s+h,..n)^{(o)}$

Und aus 37

Digitized by Google

41) $$= A(s-h+1, s-h+2, .. s-1)^{(o)} \cdot A(1, 2, .. s-h, s+1, .. n)^{(p)}$$
$$+ A(s-h+1, s-h+2, .. s)^{(1)} \cdot A(1, 2, .. s-h, s+2, .. n)^{(p-1)}$$
$$+ A(s-h+1, s-h+2, .. s+1)^{(2)} \cdot A(1, 2, .. s-h, s+3, .. n)^{(p-2)}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ A(s-h+1, s-h+2, .. s+p-1)^{(p)} \cdot A(1, 2, .. s-h, s+p+1, .. n)^{(o)}$$

Aus 40 erhalten wir die Gleichung 395 der Analysis, wenn wir $h = n-s+1$ setzen; es wird hierdurch

42) $$A(1, 2, 3, .. n)^{(p)} = A(s+1, s+2, ... n)^{(o)} \cdot A(1, 2, .. s-1)^{(p)}$$
$$+ A(s, s+1, ... n)^{(1)} \cdot A(1, 2, .. s-2)^{(p-1)}$$
$$+ A(s-1, s, ... n)^{(2)} \cdot A(1, 2, .. s-3)^{(p-2)}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ A(s-p+1, s-p+2, .. n)^{(p)} \cdot A(1, 2, .. s-p-1)^{(o)}$$

§. 4.

Wir haben in den beiden vorhergehenden §§. die Verbindungen aus allen n Elementen durch solche dargestellt, welchen Elemente fehlten, und durch die fehlenden Elemente. Wir wollen jetzt die umgekehrte Aufgabe lösen und Verbindungen mit fehlenden Elementen durch die aus allen Elementen darstellen.

Zu dem angegebenen Zwecke geben wir der Gleichung 11 die Form:

$$A\left((1, 2, .. s-1, s+1, .. n)^{(p)} f(m)\right) = A\left((1, 2, 3, .. n)^{(p)} f(m)\right)$$
$$- A\left((1, 2, .. s-1, s+1, .. n)^{(p-1)} f(m-1)\right) \cdot A_1^{(o)}$$
$$- A\left((1, 2, .. s-1, s+1, .. n)^{(p-1)} f(m-2)\right) \cdot A_2^{(o)}$$
$$- A\left((1, 2, .. s-1, s+1, .. n)^{(p-1)} f(m-3)\right) \cdot A_3^{(o)}$$
$$- \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$- A\left((1, 2, .. s-1, s+1, .. n)^{(p-1)} f(p-1)\right) \cdot A_{m-p+1}^{(o)}$$

Digitized by Google

und ersetzen die negativen Glieder, denen das Element $A^{(s)}$ fehlt, durch andere Ausdrücke, welche nach dem Gesetz der vorstehenden Gleichung gebildet sind. Es entsteht

$$A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right)$$
$$-A\left((1,2,..n)^{(p-1)}f(m-1)\right).A^{(s)}_{s} \quad +A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right).A^{(s)}_{1|m-p+1}.A^{(s)}_{s}$$
$$-A\left((1,2,..n)^{(p-1)}f(m-2)\right).A^{(s)}_{s} \quad +A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-2)}f(m-3|p-2)\right).A^{(s)}_{1|m-p} \quad .A^{(s)}_{s}$$
$$-A\left((1,2,..n)^{(p-1)}f(m-3)\right).A^{(s)}_{s} \quad +A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-2)}f(m-4|p-2)\right).A^{(s)}_{1|m-p-1}.A^{(s)}_{s}$$
$$-\ .$$
$$-A\left((1,2,..n)^{(p-1)}f(p-1)\right).A^{(s)}_{m-p+1}+A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-2)}f(p-2|p-2)\right).A^{(s)}_{1}.A^{(s)}_{m-p+1}$$

$$= A\left((1,2,..n)^{(p)}f(m)\right) - A\left([s]^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left((1,2,3,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+A\left([s]^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$

Auf gleiche Art kann man zuletzt alle Glieder wegbringen, welche kein $A^{(s)}$ enthalten, und sie durch vollständige Verbindungsklassen ersetzen. Man erhält

43) $$A\left((1,2,3,..s-1,s+1,..n)^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left([s]^{(0)}\ f\ (0|m-p)\right).A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\ f\ (m|p)\right)$$
$$-A\left([s]^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left((1,2,3,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+A\left([s]^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left((1,2,3,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$-\ .$$
$$(-)^p.A\left([s]^{(p)}\ f\ (p|m)\right).A\left((1,2,3,..n)^{(0)}\ f\ (m-p|0)\right)$$

Diese Gleichung führt, wenn die untern Stellenzahlen gleich werden, zu folgender:

44) $$A\ (1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p)} = A\ (1,2,3,..n)^{(p)}\ .\ (A^{(s)})^0$$
$$-A\ (1,2,3,..n)^{(p-1)}\ .\ (A^{(s)})^1$$
$$+A\ (1,2,3,..n)^{(p-2)}\ .\ (A^{(s)})^2$$
$$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$(-)^p.A\ (1,2,3,..n)^{(0)}\ .\ (A^{(s)})^p$$

Digitized by Google

Vervielfacht man diese Gleichung mit $(A^{(o)})^{-x}$ und setzt dann $s = 1, 2, 3, .. n$, so erhält man 401 der Analysis.

Lassen wir in 43 auch noch das Element $A^{(o+1)}$ fehlen, so schlagen wir denselben Weg ein, um die Glieder zur Rechten durch die vollständigen Verbindungsklassen zu ersetzen.

Es ist

$$\begin{aligned} A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p)}\,f(m)\right) = \\ = A\left([s,s+1]^{(o)}\,f\,(o|m-p)\right)\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\quad f\quad (m|p)\right) \\ - A\left([s,s+1]^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right)\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right) \\ + A\left([s,s+1]^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right)\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right) \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-)^p\cdot A\left([s,s+1]^{(p)}\quad f\,(p|m)\right)\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(o)}\quad f\,(m-p|o)\right) \end{aligned}$$

Und ganz allgemein, wenn h Elemente fehlen:

$$\begin{aligned} 45)\quad A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}\,f(m)\right) = \\ = A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(o)}\,f\,(o|m-p)\right)\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\quad f\quad (m|p)\right) \\ - A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right)\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right) \\ + A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right)\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right) \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-)^p\cdot A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(p)}\quad f\,(p|m)\right)\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(o)}\quad f\,(m-p|o)\right) \end{aligned}$$

Es sey $n = 5$, $p = 3$, $m = 5$, $s = 3$, $h = 2$, so ist

$$\begin{aligned} A\left((1,2,5)^{(3)}\,f(5)\right) = A\left((1,2,3,4,5)^{(3)}\,f(5)\right) \\ - A\left([3,4]^{(1)}\,f(1|3)\right)\cdot A\left((1,2,3,4,5)^{(4)}\,f(4|2)\right) \\ + A\left([3,4]^{(2)}\,f(2|4)\right)\cdot A\left((1,2,3,4,5)^{(1)}\,f(3|1)\right) \\ - A\left([3,4]^{(3)}\,f(5)\right) \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&= A\left((1,2,3,4,5)^{(3)}\,f(5)\right)\\
&- A\left([3,4]^{(1)}\,f(1)\right)\,.\,A\left((1,2,3,4,5)^{(2)}\,f(4)\right)\\
&- A\left([3,4]^{(2)}\,f(2)\right)\,.\,A\left((1,2,3,4,5)^{(3)}\,f(3)\right)\\
&- A\left([3,4]^{(1)}\,f(3)\right)\,.\,A\left((1,2,3,4,5)^{(2)}\,f(2)\right)\\
&+ A\left([3,4]^{(2)}\,f(2)\right)\,.\,A\left((1,2,3,4,5)^{(1)}\,f(3)\right)\\
&+ A\left([3,4]^{(3)}\,f(3)\right)\,.\,A\left((1,2,3,4,5)^{(1)}\,f(2)\right)\\
&+ A\left([3,4]^{(2)}\,f(4)\right)\,.\,A\left((1,2,3,4,5)^{(1)}\,f(1)\right)\\
&- A\left([3,4]^{(2)}\,f(5)\right)
\end{aligned}
$$

$$
= A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(3)} + A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_3^{(4)} + A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(3)} + A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_3^{(4)}
$$

1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2
1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1
2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2
2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1

$$
+ A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(3)} + A_1^{(1)}.A_1^{(4)}.A_3^{(3)} + A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_3^{(4)} + A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_3^{(1)}
$$

1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2
1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1
2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2
2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1

$$
+ A_1^{(1)}.A_1^{(4)}.A_3^{(3)} + A_1^{(2)}.A_1^{(4)}.A_3^{(1)}
$$

1	2	2	1	2	2
1	3	1	1	3	1
2	1	2	2	1	2
2	2	1	2	2	1
3	1	1	3	1	1

Digitized by Google

$$
-\begin{matrix} A_1^{(2)} \\ A_1^{(4)} \end{matrix} \times \left| \begin{matrix} A_1^{(1)}.A_3^{(2)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_3^{(4)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_3^{(5)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_3^{(3)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_3^{(4)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_3^{(5)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(3)}.A_3^{(4)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(3)}.A_3^{(5)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(4)}.A_3^{(5)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \end{matrix} \right| - \begin{matrix} A_2^{(2)} \\ A_2^{(4)} \end{matrix} \times \left| \begin{matrix} A_1^{(1)}.A_2^{(2)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_2^{(3)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_2^{(4)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_2^{(5)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(3)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(4)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(5)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(3)}.A_2^{(4)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(3)}.A_2^{(5)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(4)}.A_2^{(5)} \\ 2\quad 1 \end{matrix} \right| - \begin{matrix} A_3^{(2)} \\ A_3^{(4)} \end{matrix} \times \left| \begin{matrix} A_1^{(1)}.A_1^{(2)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(4)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(4)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(3)}.A_1^{(4)} \\ A_1^{(3)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(4)}.A_1^{(5)} \end{matrix} \right|
$$

$$
+\begin{matrix} A_1^{(2)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(4)} \\ A_1^{(4)}.A_1^{(4)} \end{matrix} \times \left| \begin{matrix} A_3^{(1)} \\ A_3^{(2)} \\ A_3^{(3)} \\ A_3^{(4)} \\ A_3^{(5)} \end{matrix} \right| + \begin{matrix} A_1^{(2)}.A_2^{(2)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(3)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(4)}.A_2^{(4)} \\ 2\quad 1 \end{matrix} \times \left| \begin{matrix} A_2^{(1)} \\ A_2^{(2)} \\ A_2^{(3)} \\ A_2^{(4)} \\ A_2^{(5)} \end{matrix} \right| + \begin{matrix} A_1^{(3)}.A_3^{(3)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(3)}.A_3^{(4)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \\ A_1^{(4)}.A_3^{(4)} \\ 2\quad 2 \\ 3\quad 1 \end{matrix} \times \left| \begin{matrix} A_1^{(1)} \\ A_1^{(2)} \\ A_1^{(3)} \\ A_1^{(4)} \\ A_1^{(5)} \end{matrix} \right|
$$

Digitized by Google

$$- \; A_1^{(3)} . A_1^{(3)} . A_3^{(3)} \qquad - \; A_1^{(3)} . A_1^{(3)} . A_3^{(4)} \qquad - \; A_1^{(3)} . A_1^{(4)} . A_3^{(4)}$$

1	2	2	1	2	2	1	2	2
1	3	1	1	3	1	1	3	1
2	1	2	2	1	2	2	1	2
2	2	1	2	2	1	2	2	1
3	1	1	3	1	1	3	1	1

$$- \; A_1^{(4)} . A_1^{(4)} . A_3^{(4)}$$

1	2	2
1	3	1
2	1	2
2	2	1
3	1	1

Auf dieselbe Weise erhält man

$$46) \quad A\left((1,2,..s-h,s+1,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(0)} f(0|m-p)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m|p)\right)$$

$$- A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(1)} f(1|m-p+1)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$

$$+ A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(2)} f(2|m-p+2)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right)$$

$$- \; .$$

$$(-)^p A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(p)} f(p|m)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(0)} f(m-p|0)\right)$$

Aus 45 wird für $s=1$

$$47) \quad A\left((h+1,h+2,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= A\left([1,2,3,..h]^{(0)} f(0|m-p)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m|p)\right)$$

$$- A\left([1,2,3,..h]^{(1)} f(1|m-p+1)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$

$$+ A\left([1,2,3,..h]^{(2)} f(2|m-p+2)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right)$$

$$- \; .$$

$$(-)^p A\left([1,2,3,..h]^{(p)} f(p|m)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(0)} f(m-p|0)\right)$$

Aus 46 erhält man für $s=n$

Digitized by Google

48) $$A\left((1,2,3,..n-h)^{(p)}\,f(m)\right) =$$

$$= A\left([n-h+1,n-h+2,..n]^{(0)}\,f\,(0|m-p)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m|p)\right)$$
$$- A\left([n-h+1,n-h+2,..n]^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([n-h+1,n-h+2,..n]^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p-2)}\,f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \quad . \quad . \quad .

Setzen wir in 47 h=n, so wird

$$
\begin{aligned}
53)\quad o = {} & A\left([1,2,3,..n]^{(o)}\ f\ (o|m-p)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\ f\ (m|p)\right) \\
& - A\left([1,2,3,..n]^{(1)}\ f\ (1|m-p+1)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p-1)}\ f\ (m-1|p-1)\right) \\
& + A\left([1,2,3,..n]^{(2)}\ f\ (2|m-p+2)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p-2)}\ f\ (m-2|p-2)\right) \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (-)^p \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\ f\ (p|m)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(o)}\ f\ (m-p|o)\right)
\end{aligned}
$$

Lassen wir hierin die Verschiedenheit der untern Stellenzahlen verschwinden, so wird

$$
\begin{aligned}
54)\quad o = {} & A\,[1,2,3,..n]^{(o)} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p)} \\
& - A\,[1,2,3,..n]^{(1)} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p-1)} \\
& + A\,[1,2,3,..n]^{(2)} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p-2)} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (-)^p \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(p)} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(o)}
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung setzt uns in den Stand, die geordneten Verbindungen ohne Wiederholung durch die mit Wiederholung auszudrücken.

Es ist

$$A\,(1,2,3,..n)^{(1)} = A\,[1,2,3,..n]^{(1)}$$

$$A\,(1,2,3,..n)^{(2)} = A\,[1,2,3,..n]^{(1)} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(1)} - A\,[1,2,3,..n]^{(2)}$$

$$
\begin{aligned}
A\,(1,2,3,..n)^{(3)} = {} & A\,[1,2,3,..n]^{(1)} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(1)} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(1)} \\
& - A\,[1,2,3,..n]^{(1)} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(2)} \\
& - A\,[1,2,3,..n]^{(2)} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(1)} \\
& + A\,[1,2,3,..n]^{(3)}
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Ganz allgemein erhalten wir

Digitized by Google

$$55)\quad (-)^{p-1}\cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p)} = A\,[1,2,3,..n]^{(\ )}\left(f(p)\,(1,2,3,..)\right)^{(\ )}$$
$$- A\,[1,2,3,..n]^{(\ )}\left(f(p)\,(1,2,3,..)\right)^{(')}$$
$$+ A\,[1,2,3,..n]^{(\ )}\left(f(p)\,(1,2,3,..)\right)^{('')}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{p-1}\cdot A\,[1,2,3,..n]^{(\ )}\left(f(p)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)}$$

Hierin müssen die, die Summe bildenden, Stellenzahlen in die leeren Klammern gesetzt werden.

§. 5.

Eines der einfachsten Gesetze der gedoppelten Verbindungen ist, dass, wenn man Klassen bildet aus n Elementen zu p Elementen zur Summe m, in welchen der Reihe nach die Elemente $A^{(\ )}$, $A^{(')}$, $A^{('')}$ u.s.w. nicht vorkommen, die Summe aller dieser Verbindungen $=$ (n−p)mal die vollständige Verbindungsklasse aus n Elementen zu p Elementen zur Summe m ist.

Diese für die geordneten Verbindungen ohne Wiederholung bereits bekannte Wahrheit gilt auch den gedoppelten Verbindungen ohne Wiederholung, und es ist

$$56)\quad (n-p)\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right) = A\left((2,3,4,..n)^{(p)}\,f(m)\right)$$
$$+ A\left((1,3,4,..n)^{(p)}\,f(m)\right)$$
$$+ A\left((1,2,4,..n)^{(p)}\,f(m)\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left((1,2,3,..n-1)^{(p)}\,f(m)\right)$$

Der Grund dieses Gesetzes lässt sich leicht einsehen. Wären alle Klassen vollständig, so würde irgend eine Verbindung n mal vorkommen müssen; nun kann sie aber in allen jenen Klassen nicht vorkommen, worin die Elemente fehlen sollen, aus denen diese Verbindung

Digitized by Google

zusammengesetzt ist, in p Klassen kann sie also nicht vorkommen, weil jede Verbindung p Elemente enthält, daher im Ganzen nur (n−p) mal.

Im Falle, wo die untern Stellenzahlen gleich werden, erscheint jede Verbindung gleich oft, und es bleibt nach Entfernung des gemeinschaftlichen Faktors (396 der Analysis)

$$57)\quad (n-p)\,A\,(1,2,3,..n)^{(p)} = A\,(2,3,4,..n)^{(p)} + A\,(1,3,4,..n)^{(p)} + A\,(1,2,4,..n)^{(p)} + \ldots + A\,(1,2,3,..n-1)^{(p)}$$

Wir bilden jetzt nach der Gleichung 12, indem wir $s = 1,2,3,..n$ setzen, die folgenden Gleichungen:

$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) = A\left((2,3,4,..n)^{(p)} f(m)\right) + A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) . A^{(1)}_{|m-p+1}$$
$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) = A\left((1,3,4,..n)^{(p)} f(m)\right) + A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) . A^{(2)}_{|m-p+1}$$
$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) = A\left((1,2,4,..n)^{(p)} f(m)\right) + A\left((1,2,4,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) . A^{(3)}_{|m-p+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) = A\left((1,2,3,..n-1)^{(p)} f(m)\right) + A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) . A^{(n)}_{|m-p+1}$$

Vereinigen wir diese Gleichungen und beachten, dass der Ausdruck zur Linken n mal vorkommt, die Summe der ersten Glieder zur Rechten aber nach 56 $= (n-p) . A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right)$ ist, so entsteht

$$58)\quad p . A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) = A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) . A^{(1)}_{|m-p+1} + A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) . A^{(2)}_{|m-p+1} + A\left((1,2,4,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) . A^{(3)}_{|m-p+1} + \ldots + A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) . A^{(n)}_{|m-p+1}$$

Digitized by Google

Auf diese Art erhalten wir eine einfache zurücklaufende Bildungsweise, welche die Verbindungen zu p Elementen zur Summe m auf die zu p−1 Elementen zur Summe m−1, m−2,..p−1 zurückweisst.

Lassen wir die Verschiedenheit der untern Stellenzahlen verschwinden und trennen den gemeinschaftlichen Faktor, so wird (397 der Analysis)

$$59)\quad p\,.\,A\,(1,2,3,..n)^{(p)} = A\,(2,3,4,..n)^{(p-1)}\,.\,A^{(1)} + A\,(1,3,4,..n)^{(p-1)}\,.\,A^{(2)} + A\,(1,2,4,..n)^{(p-1)}\,.\,A^{(3)} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + A\,(1,2,3,..n-1)^{(p-1)}\,.\,A^{(n)}$$

Die Gleichung 58 ist einer wichtigen Erweiterung fähig. Die Verbindungsklassen sind zum Theil mit A, oder mit $A_,$, $A_{,,}$.. vielfacht; setzt man aber statt diesen Elementen $1.A_,$, $2.A_,$, $3.A_{,,}$.. so erhält man eine weit ausgedehntere Gleichung, es erscheint alsdann jede Verbindung begriffen in $A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,\mathfrak{f}\,(m)\right)$ m mal oder

$$60)\quad m\,.\,A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,\mathfrak{f}\,(m)\right) = (1|m-p+1)\,.\,A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)}\,\mathfrak{f}\,(m-1|p-1)\right)\,.\,A^{(1)}_{|m-p+1} + (1|m-p+1)\,.\,A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)}\,\mathfrak{f}\,(m-1|p-1)\right)\,.\,A^{(2)}_{|m-p+1} + (1|m-p+1)\,.\,A\left((1,2,4,..n)^{(p-1)}\,\mathfrak{f}\,(m-1|p-1)\right)\,.\,A^{(3)}_{|m-p+1} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + (1|m-p+1)\,.\,A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}\,\mathfrak{f}\,(m-1|p-1)\right)\,.\,A^{(n)}_{|m-p+1}$$

Es sey $n=5$, $p=3$, $m=5$, so ist nach 58

$$3\,.\,A\left((1,2,3,4,5)^{(3)}\,\mathfrak{f}\,(5)\right) = A\left((2,3,4,5)^{(2)}\,\mathfrak{f}\,(4|2)\right)\,.\,A^{(1)}_{|3} + A\left((1,3,4,5)^{(2)}\,\mathfrak{f}\,(4|2)\right)\,.\,A^{(2)}_{|3} + A\left((1,2,4,5)^{(2)}\,\mathfrak{f}\,(4|2)\right)\,.\,A^{(3)}_{|3} + A\left((1,2,3,5)^{(2)}\,\mathfrak{f}\,(4|2)\right)\,.\,A^{(4)}_{|3} + A\left((1,2,3,4)^{(2)}\,\mathfrak{f}\,(4|2)\right)\,.\,A^{(5)}_{|3}$$

Digitized by Google

$$= A\left((2,3,4,5)^{(1)}\,f(4)\right).A_1^{(1)} + A\left((2,3,4,5)^{(2)}\,f(3)\right).A_1^{(1)} + A\left((2,3,4,5)^{(3)}\,f(2)\right).A_3^{(1)}$$
$$+ A\left((1,3,4,5)^{(1)}\,f(4)\right).A_1^{(2)} + A\left((1,3,4,5)^{(2)}\,f(3)\right).A_1^{(2)} + A\left((1,3,4,5)^{(3)}\,f(2)\right).A_3^{(2)}$$
$$+ A\left((1,2,4,5)^{(1)}\,f(4)\right).A_1^{(3)} + A\left((1,2,4,5)^{(2)}\,f(3)\right).A_1^{(3)} + A\left((1,2,4,5)^{(3)}\,f(2)\right).A_3^{(3)}$$
$$+ A\left((1,2,3,5)^{(1)}\,f(4)\right).A_1^{(4)} + A\left((1,2,3,5)^{(2)}\,f(3)\right).A_1^{(4)} + A\left((1,2,3,5)^{(3)}\,f(2)\right).A_3^{(4)}$$
$$+ A\left((1,2,3,4)^{(1)}\,f(4)\right).A_1^{(5)} + A\left((1,2,3,4)^{(2)}\,f(3)\right).A_1^{(5)} + A\left((1,2,3,4)^{(3)}\,f(2)\right).A_3^{(5)}$$

$$= \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(2)} \\ 2 \quad 2 \\ 3 \quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_3^{(4)} \\ 2 \quad 2 \\ 3 \quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_3^{(5)} \\ 2 \quad 2 \\ 3 \quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_3^{(4)} \\ 2 \quad 2 \\ 3 \quad 1 \\ A_1^{(3)}.A_3^{(5)} \\ 2 \quad 2 \\ 3 \quad 1 \\ A_1^{(4)}.A_3^{(5)} \\ 2 \quad 2 \\ 3 \quad 1 \end{vmatrix} \times A_1^{(1)} + \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_2^{(2)} \\ 2 \quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_2^{(4)} \\ 2 \quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_2^{(5)} \\ 2 \quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(4)} \\ 2 \quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(5)} \\ 2 \quad 1 \\ A_1^{(4)}.A_2^{(5)} \\ 2 \quad 1 \end{vmatrix} \times A_2^{(1)} + \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(4)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(3)}.A_1^{(4)} \\ A_1^{(3)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(4)}.A_1^{(5)} \end{vmatrix} \times A_3^{(1)}$$

Digitized by Google

$$+ \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(3)} & A_1^{(1)}.A_2^{(3)} & A_1^{(1)}.A_1^{(2)} \\ 2\ \ 2 & 2\ \ 1 & A_1^{(1)}.A_1^{(4)} \\ 3\ \ 1 & A_1^{(1)}.A_2^{(4)} & A_1^{(1)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(4)} & 2\ \ 1 & A_1^{(3)}.A_1^{(4)} \\ 2\ \ 2 & A_1^{(1)}.A_2^{(5)} & A_1^{(3)}.A_1^{(5)} \\ 3\ \ 1 & 2\ \ 1 & A_1^{(4)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(5)} & A_1^{(3)}.A_2^{(4)} & \\ 2\ \ 2 & 2\ \ 1 & \\ 3\ \ 1 & A_1^{(3)}.A_2^{(5)} & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(4)} & 2\ \ 1 & \\ 2\ \ 2 & A_1^{(4)}.A_2^{(5)} & \\ 3\ \ 1 & 2\ \ 1 & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(5)} & & \\ 2\ \ 2 & & \\ 3\ \ 1 & & \\ A_1^{(4)}.A_3^{(5)} & & \\ 2\ \ 2 & & \\ 3\ \ 1 & & \end{vmatrix} \times A_1^{(2)} + \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(3)} & A_1^{(1)}.A_2^{(3)} & A_1^{(1)}.A_1^{(2)} \\ 2\ \ 2 & 2\ \ 1 & A_1^{(1)}.A_1^{(4)} \\ 3\ \ 1 & A_1^{(1)}.A_2^{(4)} & A_1^{(1)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(4)} & 2\ \ 1 & A_1^{(2)}.A_1^{(4)} \\ 2\ \ 2 & A_1^{(1)}.A_2^{(5)} & A_1^{(2)}.A_1^{(5)} \\ 3\ \ 1 & 2\ \ 1 & A_1^{(4)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(5)} & A_1^{(2)}.A_2^{(4)} & \\ 2\ \ 2 & 2\ \ 1 & \\ 3\ \ 1 & A_1^{(2)}.A_2^{(5)} & \\ A_1^{(2)}.A_3^{(4)} & 2\ \ 1 & \\ 2\ \ 2 & A_1^{(4)}.A_2^{(5)} & \\ 3\ \ 1 & 2\ \ 1 & \\ A_1^{(2)}.A_3^{(5)} & & \\ 2\ \ 2 & & \\ 3\ \ 1 & & \\ A_1^{(4)}.A_3^{(5)} & & \\ 2\ \ 2 & & \\ 3\ \ 1 & & \end{vmatrix} \times A_2^{(2)} + \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(2)} & \\ A_1^{(1)}.A_1^{(4)} & \\ A_1^{(1)}.A_1^{(5)} & \\ A_1^{(2)}.A_1^{(4)} & \\ A_1^{(2)}.A_1^{(5)} & \\ A_1^{(4)}.A_1^{(5)} & \end{vmatrix} \times A_3^{(2)}$$

$$+ \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(3)} & A_1^{(1)}.A_2^{(3)} & A_1^{(1)}.A_1^{(3)} \\ 2\ \ 2 & 2\ \ 1 & A_1^{(1)}.A_1^{(4)} \\ 3\ \ 1 & A_1^{(1)}.A_2^{(4)} & A_1^{(1)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(4)} & 2\ \ 1 & A_1^{(3)}.A_1^{(4)} \\ 2\ \ 2 & A_1^{(1)}.A_2^{(5)} & A_1^{(3)}.A_1^{(5)} \\ 3\ \ 1 & 2\ \ 1 & A_1^{(4)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(5)} & A_1^{(3)}.A_2^{(4)} & \\ 2\ \ 2 & 2\ \ 1 & \\ 3\ \ 1 & A_1^{(3)}.A_2^{(5)} & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(4)} & 2\ \ 1 & \\ 2\ \ 2 & A_1^{(4)}.A_2^{(5)} & \\ 3\ \ 1 & 2\ \ 1 & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(5)} & & \\ 2\ \ 2 & & \\ 3\ \ 1 & & \\ A_1^{(4)}.A_3^{(5)} & & \\ 2\ \ 2 & & \\ 3\ \ 1 & & \end{vmatrix} \times A_1^{(3)} + \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(3)} & A_1^{(1)}.A_2^{(3)} & A_1^{(1)}.A_1^{(3)} \\ 2\ \ 2 & 2\ \ 1 & A_1^{(1)}.A_1^{(4)} \\ 3\ \ 1 & A_1^{(1)}.A_2^{(4)} & A_1^{(1)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(4)} & 2\ \ 1 & A_1^{(3)}.A_1^{(4)} \\ 2\ \ 2 & A_1^{(1)}.A_2^{(5)} & A_1^{(3)}.A_1^{(5)} \\ 3\ \ 1 & 2\ \ 1 & A_1^{(4)}.A_1^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(5)} & A_1^{(3)}.A_2^{(4)} & \\ 2\ \ 2 & 2\ \ 1 & \\ 3\ \ 1 & A_1^{(3)}.A_2^{(5)} & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(4)} & 2\ \ 1 & \\ 2\ \ 2 & A_1^{(4)}.A_2^{(5)} & \\ 3\ \ 1 & 2\ \ 1 & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(5)} & & \\ 2\ \ 2 & & \\ 3\ \ 1 & & \\ A_1^{(4)}.A_3^{(5)} & & \\ 2\ \ 2 & & \\ 3\ \ 1 & & \end{vmatrix} \times A_2^{(3)} + \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(3)} & \\ A_1^{(1)}.A_1^{(4)} & \\ A_1^{(1)}.A_1^{(5)} & \\ A_1^{(3)}.A_1^{(4)} & \\ A_1^{(3)}.A_1^{(5)} & \\ A_1^{(4)}.A_1^{(5)} & \end{vmatrix} \times A_3^{(3)}$$

Digitized by Google

$$+\begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(2)} & A_1^{(4)} \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)} & \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \\ A_1^{(1)}.A_3^{(5)} & \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \\ A_1^{(2)}.A_3^{(3)} & \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \\ A_1^{(2)}.A_3^{(5)} & \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(5)} & \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_2^{(2)} & A_2^{(4)} \\ 2 \quad 1 & \\ A_1^{(1)}.A_2^{(3)} & \\ 2 \quad 1 & \\ A_1^{(1)}.A_2^{(5)} & \\ 2 \quad 1 & \\ A_1^{(2)}.A_2^{(3)} & \\ 2 \quad 1 & \\ A_1^{(2)}.A_2^{(5)} & \\ 2 \quad 1 & \\ A_1^{(3)}.A_2^{(5)} & \\ 2 \quad 1 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(2)} & A_3^{(4)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(3)} & \\ A_1^{(1)}.A_1^{(5)} & \\ A_1^{(2)}.A_1^{(3)} & \\ A_1^{(2)}.A_1^{(5)} & \\ A_1^{(3)}.A_1^{(5)} & \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(2)} & A_1^{(5)} \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)} & \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \\ A_1^{(1)}.A_3^{(4)} & \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \\ A_1^{(2)}.A_3^{(3)} & \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \\ A_1^{(2)}.A_3^{(4)} & \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(4)} & \\ 2 \quad 2 & \\ 3 \quad 1 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_2^{(2)} & A_2^{(5)} \\ 2 \quad 1 & \\ A_1^{(1)}.A_2^{(3)} & \\ 2 \quad 1 & \\ A_1^{(1)}.A_2^{(4)} & \\ 2 \quad 1 & \\ A_1^{(2)}.A_2^{(3)} & \\ 2 \quad 1 & \\ A_1^{(2)}.A_2^{(4)} & \\ 2 \quad 1 & \\ A_1^{(3)}.A_2^{(4)} & \\ 2 \quad 1 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(2)} & A_3^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(3)} & \\ A_1^{(1)}.A_1^{(4)} & \\ A_1^{(2)}.A_1^{(3)} & \\ A_1^{(2)}.A_1^{(4)} & \\ A_1^{(3)}.A_1^{(4)} & \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

Hier erscheint jede Verbindung ganz richtig dreimal, z. B. die erste Verbindung $A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(3)}$ steht in der ersten Gruppe erster Colonne erstem Gliede; in der zweiten Gruppe erster Colonne erstem Gliede und in der dritten Gruppe dritter Colonne erstem Gliede, sie ist also dreimal vorhanden; dasselbe gilt von jeder andern Verbindung.

Werden aber in jeder Gruppe die Colonnen der Reihe nach mit 1, 2, 3, vervielfacht, so steht die angeführte Verbindung an den beiden ersten Orten einmal, an dem letzten dreimal, so dass sie im Ganzen $1+1+3=5$ mal vorhanden ist; dasselbe gilt von jeder andern Verbindung.

Vervielfacht man 58 mit $\alpha-\beta$ und 60 mit β und verbindet beide durch Zuzählen, so wird

$$61)\quad \Big(\alpha\, p+\beta\,(m-p)\Big)\,.\,A\Big((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\Big) =$$
$$= \Big(\alpha+(o|m-p)\beta\Big)\,.\,A\Big((2,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\Big)\,.\,A^{(1)}_{1|m-p+1}$$
$$+ \Big(\alpha+(o|m-p)\beta\Big)\,.\,A\Big((1,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\Big)\,.\,A^{(2)}_{1|m-p+1}$$
$$+ \Big(\alpha+(o|m-p)\beta\Big)\,.\,A\Big((1,2,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\Big)\,.\,A^{(3)}_{1|m-p+1}$$
$$+ \;.$$
$$+ \Big(\alpha+(o|m-p)\beta\Big)\,.\,A\Big((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\Big)\,.\,A^{(n)}_{1|m-p+1}$$

Nimmt man hierin die unteren Stellenzahlen gleich an, so führt dies zu 59, lässt man aber die oberen Stellenzahlen gleich werden, so entsteht

$$62)\quad \Big(\alpha+\frac{m-p}{p}\beta\Big).A\Big(f(m)\,(1,2,3,..)\Big)^{(p)} = \alpha.A\Big(f(m-1)\,(1,2,3,..)\Big)^{(p-1)}.A_1$$
$$+\Big(\alpha+1.\beta\Big)\,A\Big(f(m-2)\,(1,2,3,..)\Big)^{(p-1)}.A_2$$
$$+\Big(\alpha+2.\beta\Big)\,A\Big(f(m-3)\,(1,2,3,..)\Big)^{(p-1)}.A_3$$
$$+\;.$$
$$+\Big(\alpha+(m-p)\beta\Big)\,A\Big(f(p-1)\,(1,2,3,..)\Big)^{(p-1)}.A_{m-p+1}$$

Digitized by Google

Die Gleichheit der untern Stellenzahlen verursacht in 61, dass alle Glieder irgend einer Horizontalreihe einander gleich werden, nur erscheinen sie nicht gleich oft. Es ist z. B. das erste Glied in 61 in diesem Falle

$$= A(2,3,4,..n)^{(p-1)}\left(\alpha.\frac{(m-2)^{p-2|-1}}{1^{p-2,1}}+\left(\alpha+\beta\right).\frac{(m-3)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}}+..+\left(\alpha+(m-p)\beta\right).\frac{(p-2)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}}\right)$$

$$= A(2,3,4,..n)^{(p-1)}\left(\alpha.\frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}+\beta\left(1.\frac{(m-3)^{p-2|-1}}{1^{p-2,1}}+2.\frac{(m-4)^{p-2|-1}}{1^{p-2,1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+..+\left(m-p\right).\frac{(p-2)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}}\right)\right)$$

$$= A(2,3,4,..n)^{(p-1)}\left(\alpha.\frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}+\beta.\left(\frac{(m-2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}+\frac{(m-3)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}+..+\frac{(p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}\right)\right)$$

$$= A(2,3,4,..n)^{(p-1)}\left(\alpha.\frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}+\beta.\frac{(m-1)^{p|-1}}{1^{p|1}}\right)$$

$$= \frac{1}{p}.\ A(2,3,4,..n)^{(p-1)}\left(\alpha.p+\beta(m-p)\right).\frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens kann man nun den Faktor

$$\left(\alpha.p+\beta(m-p)\right)\ .\ \frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

hinweg nehmen, vervielfacht man alsdann durch p, so entsteht 59.

Werden die obern Stellenzahlen gleich, so werden auch alle Horizontalreihen in 61 gleich, und eine jede erscheint gleich oft, nämlich $\frac{(n-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$ mal. Da nun n Reihen vorhanden sind, so ist der Ausdruck zur Rechten

$$= p\ .\ \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}\ .\ A\left(\int(m-1|p-1)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-1)}\ .\ A_{,1|m-p+1}$$

Die Verbindungsklasse zur Linken entsteht $\frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}$ mal; nimmt man diesen Faktor von beiden Seiten hinweg und misst durch p, so erhält man 62.

Digitized by Google

§. 6.

In der Gleichung 58 haben wir ein Element getrennt und zwar in jeder Verbindungsklasse ein anderes. Wir erweitern diese Formel, indem wir, nach demselben Gesetze, aus jeder Verbindungsklasse ein neues Element haben. Der Weg, auf welchem diese Trennung geschehen kann, ist vorgezeichnet, man vervielfacht 58 mit $p-1$ und wendet das Gesetz dieser Gleichung auf die einzelnen Glieder derselben an.

Es wird

$$\frac{p^{\underline{1}|-1}}{1^{\underline{1}|1}} \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$
$$= A\left((3,4,5,..n)^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right) \cdot A\left((1,2)^{(2)} f(2|m-p+2)\right)$$
$$+ A\left((2,4,5,..n)^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right) \cdot A\left((1,3)^{(2)} f(2|m-p+2)\right)$$
$$+ A\left((2,3,5,..n)^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right) \cdot A\left((1,4)^{(2)} f(2|m-p+2)\right)$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left((1,2,3,..n-2)^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right) \cdot A\left((n-1,n)^{(2)} f(2|m-p+2)\right)$$

Ganz auf dieselbe Art kann man neue Elemente aus den Verbindungsklassen heben und erhält zuletzt, wenn h Elemente gesondert werden.

63) $$\frac{p^{\underline{h}|-1}}{1^{\underline{h}|1}} \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$
$$= A\left((1,2,3,..h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ A\left((1,2,..h-1,h+1)^{(h)} f(h|m-p\ h)\right) \cdot A\left((h,h+2,....n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ A\left((1,2,..h-1,h+2)^{(h)} f(h|m-p\ h)\right) \cdot A\left((h,h+1,....n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-h)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

Wir haben in dieser Gleichung ein eigenthümliches Gesetz; die n Elemente werden in zwei Klassen zu h und p-h Elemente nach dem

Digitized by Google

Gesetze der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen vertheilt, während aus den Elementen, welche auf diese Art in die beiden Klassen fallen, selbst wieder diese Verbindungen gebildet werden müssen. Um diese Art der Veränderung nach dem Gesetze der geordneten Verbindungen ohne Wiederholung anzuzeigen, wollen wir die erste Klammer wiederholen, wodurch das vorstehende Gesetz auch auf folgende Art dargelegt werden kann:

$$\frac{p^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$
$$= A\left((1,2,3,..h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

Indem wir hierin die obern Stellenzahlen gleich werden lassen, erhalten wir ein bekanntes Gesetz für die Verbindungen zu bestimmten Summen. Die sämmtlichen Horizontalreihen werden in diesem Falle gleich und jedes Glied ist gleich oft vorhanden, nämlich

$$\frac{h^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot \frac{(n-h)^{p-h|-1}}{1^{p-h|1}} = \frac{(n-h)^{p-h|-1}}{1^{p-h|1}} \text{ mal.}$$

Die Anzahl der Horizontalreihen ist gleich der Anzahl der geordneten Verbindungen aus n Elementen zu h Elementen, also $= \frac{n^{h|-1}}{1^{h|1}}$. Wir erhalten daher

$$\frac{p^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)} =$$
$$= \frac{n^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot \frac{(n-h)^{p-h|-1}}{1^{p-h|1}} \cdot A\left(f(h|m-p+h)\,(1,2,3,..)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(m-h|p-h)\,(1,2,..)\right)^{(p-h)}$$

Nun ist aber

$$\frac{p^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot \frac{n^{p|-1}}{1^{h|1}} = \frac{n^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot \frac{(n-h)^{p-h|-1}}{1^{p-h|1}}$$

daher

Digitized by Google

$$64)\quad A\left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(p)} = A\left(f(h)\ (1,2,3,...)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(m-h)\ (1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$
$$+ A\left(f(h+1)\ (1,2,3,..)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(m-h-1)\ (1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$
$$+ A\left(f(h+2)\ (1,2,3,..)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(m-h-2)\ (1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left(f(h+m-p)(1,2,3,..)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(p-h)(1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$

Wir wollen nun in 63 die Verschiedenheit der untern Stellenzahlen verschwinden lassen. In diesem Falle entsteht jede Horizontal-Reihe gleich oft, und zwar

$$\frac{(h-1)^{h-1|-1}}{1^{h-1|1}} \cdot \frac{(m-h-1)^{p-h-1|-1}}{1^{p-h-1|1}} + \frac{h^{h-1|-1}}{1^{h-1|1}} \cdot \frac{(m-h-2)^{p-h-1|-1}}{1^{p-h-1|1}} + \ldots$$
$$+ \ldots + \frac{(m-p+h-1)^{h-1|-1}}{1^{h-1|1}} \cdot \frac{(p-h-1)^{p-h-1|-1}}{1^{p-h-1|1}}$$
$$= \frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

mal. Denselben Faktor erhalten wir auf der linken Seite, wird er vernachlässigt, so entsteht

$$65)\quad \frac{p^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p)} = A^{(1)} \cdot A^{(2)} \ldots\ldots A^{(h-1)} \cdot A^{(h)} \cdot A\,(h+1, h+2, .. n)^{(p-h)}$$
$$+ A^{(1)} \cdot A^{(2)} \ldots\ldots A^{(h-1)} \cdot A^{(h+1)} \cdot A\,(h,\ h+2, \ldots . n)^{(p-h)}$$
$$+ A^{(1)} \cdot A^{(2)} \ldots\ldots A^{(h-1)} \cdot A^{(h+2)} \cdot A\,(h,\ h+1, \ldots . n)^{(p-h)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A^{(n-h+1)} \cdot A^{(n-h+1)} \ldots A^{(n-1)} \cdot A^{(n)} \cdot A\,(1,2,3, \ldots n-h)^{(p-h)}$$

Auf gleiche Weise wie 58 behandeln wir die Gleichung 60; wir vervielfachen sie mit $(p-1)$ und verbinden sie mit 58, indem wir das Gesetz der letzten auf die Glieder der ersten anwenden und erhalten hierdurch

Digitized by Google

$$m \cdot \frac{p-1}{1} \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$
$$= (2|m-p+2) \cdot A\left((1,2)^{(*)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p-*)} f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ (2|m-p+2) \cdot A\left((1,3)^{(*)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((2,4,5,..n)^{(p-*)} f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ (2|m-p+2) \cdot A\left((1,4)^{(*)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((2,3,5,..n)^{(p-*)} f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ (2|m-p+2) \cdot A\left((n-1,n)^{(*)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-2)^{(p-*)} f(m-2|p-2)\right)$$

Eben so können wir, indem wir diese Gleichung mit 58 wieder verbinden, durch Wiederholung desselben Geschäftes andere Elemente aus den ursprünglichen Verbindungen heben und sie den neuen Verbindungsklassen zuordnen. Man erhält ganz allgemein

66) $$m \cdot \frac{(p-1)^{h-1|-1}}{1^{h-1|-1}} \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$
$$= (h|m-p\ h) \cdot A\left((1,2,3,\ldots..h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ (h|m-p+h) \cdot A\left((1,2,3,..h-1,h+1)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left((h,h+2,..n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ (h|m-p+h) \cdot A\left((1,2,3,..h-1,h+2)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left((h,h+1,..n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ (h|m-p+h) \cdot A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(p)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-h)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

Vervielfachen wir diese Gleichung mit β, die 63 aber mit $\alpha - h\beta$ und zählen beide zusammen, so wird

67) $$\frac{p^{h|-1}}{1^{h|-1}} \cdot \left(\alpha + \frac{(m-p)\,h}{p}\beta\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$
$$= \left(\alpha + (o|m-p)\beta\right) \cdot A\left((1,2,..h-1,h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ \left(\alpha + (o|m-p)\beta\right) \cdot A\left((1,2,..h-1,h+1)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left((h,h+2,..n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ \left(\alpha + (o|m-p)\beta\right) \cdot A\left((1,2,..h-1,h+2)^{(h)} f(h|m-p\ h)\right) \cdot A\left((h,h+1,..n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \left(\alpha + (o|m-p)\beta\right) \cdot A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-h)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

oder auch

$$= \left(\alpha + (o|m-p)\beta\right) \cdot A\left((1,2,..h)^{(h)} f(h|m-p+h\right) \cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

Digitized by Google

Lassen wir hierin die unteren Stellenzahlen gleich werden, so gelangen wir wieder zur Gleichung 65; werden aber die obern Stellenzahlen gleich, so entsteht

$$68)\quad \left(\alpha+\frac{(m-p)\,h}{p}\beta\right)\cdot A\left(f(m)\ (1,2,3,..)\right)^{(p)} =$$
$$= \alpha \cdot A\left(f(h)\ (1,2,3,.....)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(m-h)\ (1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$
$$+ \left(\alpha+1\cdot\beta\right) \cdot A\left(f(h+1)\ (1,2,3,...)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(m-h-1)\ (1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$
$$+ \left(\alpha+2\cdot\beta\right) \cdot A\left(f(h+2)\ (1,2,3,...)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(m-h-2)\ (1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left(\alpha+(m-p)\beta\right)\cdot A\left(f(h+m-p)\ (1,2,3,..)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(p-h)\ (1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$

§. 7.

Wir kehren wieder zur Gleichung 12 zurück und bilden, wie im §. 5, indem wir $s=1,2,3,..n$ setzen, eine Reihe von Gleichungen, zählen sie zusammen und erhalten

$$69)\quad n\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left((2,3,4,..n)^{(p)}\ f(m)\right) + A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)}\ f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(1)}_{1|m-p+1}$$
$$+ A\left((1,3,4,..n)^{(p)}\ f(m)\right) + A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)}\ f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(2)}_{1|m-p+1}$$
$$+ A\left((1,2,4,..n)^{(p)}\ f(m)\right) + A\left((1,2,4,..n)^{(p-1)}\ f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(3)}_{1|m-p+1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left((1,2,3,..n-1)^{(p)}f(m)\right) + A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(n)}_{1|m-p+1}$$

Diese Gleichung vervielfachen wir mit $n-1$ und trennen, nach dem Gesetze derselben, ein neues Element. Es wird:

Digitized by Google

$$\frac{n^{\underline{p}|-1}}{1^{\underline{p}|}} \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= A\left((1,2)^{(0)} f(0|m-p)\right) \cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$+ A\left((1,3)^{(0)} f(0|m-p)\right) \cdot A\left((2,4,5,..n)^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ A\left((n-1,n)^{(0)} f(0|m-p)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-2)^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$+ A\left((1,2)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((1,3)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left((2,4,5,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ A\left((n-1,n)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-2)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((1,2)^{(2)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ A\left((1,3)^{(2)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((2,4,5,..n)^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ A\left((n-1,n)^{(2)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n-2)^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right)$$

Wir haben hier Klassen von Verbindungen, welche nicht immer dieselben Elemente enthalten, sondern welche sie nach dem Gesetze der geordneten Verbindungen ohne Wiederholung wechseln. Diesen Wechsel der Elemente haben wir im Vorhergehenden durch ein besonderes Zeichen, durch die Wiederholung der Klammer angedeutet. Werden nun h Elemente getrennt, so ist

70) $$\frac{n^{\underline{h}|-1}}{1^{\underline{h}|}} \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= A\left(((1,2,3,..h)^{(0)} f(0|m-p)\right) \cdot A\left(((h+1,h+2,..n)^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$+ A\left(((1,2,3,..h)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left(((h+1,h+2,..n)^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left(((1,2,3,..h)^{(2)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left(((h+1,h+2,..n)^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ A\left(((1,2,3,..h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left(((h+1,h+2,..n)^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

Im Falle der Gleichheit der untern Stellenzahlen wird

Digitized by Google

$$71)\quad \frac{n^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p)} = A\,((1,2,3,..h)^{(0)} \cdot A\,((h+1,h+2,..n)^{(p)}$$
$$+ A\,((1,2,3,..h)^{(1)} \cdot A\,((h+1,h+2,..n)^{(p-1)}$$
$$+ A\,((1,2,3,..h)^{(2)} \cdot A\,((h+1,h+2,..n)^{(p-2)}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\,((1,2,3,..h)^{(h)} \cdot A\,((h+1,h+2,..n)^{(p-h)}$$

Wir verbinden nun 69 mit 60 durch Zuzählen und erhalten

$$72)\quad (m+n)\,A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right) =$$
$$= A\left((2,3,4,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right) + (2|m-p+2)\,A\left((2,3,....n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(1)}_{1|m-p+1}$$
$$+ A\left((1,3,4,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right) + (2|m-p+2)\,A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(1)}_{1|m-p+1}$$
$$+ A\left((1,2,4,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right) + (2|m-p+2)\,A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(2)}_{1|m-p+1}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left((1,2,3,..n-1)^{(p)}\,f\,(m)\right) + (2|m-p+2)\,A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(n)}_{1|m-p+1}$$

Diese Gleichung vervielfachen wir mit $n-1$ und wenden das Gesetz 69 auf dieselbe an, so wird

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right) =$$
$$= \left(\frac{2}{2}\,\middle|\,\frac{m-p+2}{2}\right)\cdot A\left((1,2)^{(0)}\,f\,(0|m-p)\right)\cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p)}\,f\,(m|p)\right)$$
$$+ \left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{m-p+3}{2}\right)\cdot A\left((1,2)^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right)\cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)$$
$$+ \left(\frac{4}{2}\,\middle|\,\frac{m-p+4}{2}\right)\cdot A\left((1,2)^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right)\cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$

Und ganz allgemein erhält man, wenn h Elemente getrennt werden:

$$73)\quad \left(1+\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{n^{h|-1}}{1^{h|1}}\cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right) =$$
$$= \left(\frac{h}{h}\,\middle|\,\frac{m-p+h}{h}\right)\cdot A\left((1,2,3,..h)^{(0)}\,f\,(0|m-p)\right)\cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p)}\,f\,(m|p)\right)$$
$$+ \left(\frac{h+1}{h}\,\middle|\,\frac{m-p+h+1}{h}\right)\cdot A\left((1,2,3,..h)^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right)\cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)$$
$$+ \left(\frac{h+2}{h}\,\middle|\,\frac{m-p+h+2}{h}\right)\cdot A\left((1,2,3,..h)^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right)\cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ \left(\frac{2h}{h}\,\middle|\,\frac{m-p+2h}{h}\right)\cdot A\left((1,2,3,..h)^{(h)}\,f\,(h|m-p+h)\right)\cdot A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-h)}\,f\,(m-h|p-h)\right)$$

Digitized by Google

Diese Gleichung zerfällt in zwei Theile, in die Gleichung 70 und in die folgende.

$$74)\quad \frac{m\,.\,h}{n}\,.\,\frac{n^{h|-1}}{1^{h|}}\,.\,A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right) =$$

$$= (1|m-p+1)\,A\left((1,2,3,..h)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right).A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$

$$+ (2|m-p+2)\,A\left((1,2,3,..h)^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right).A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-2)}\,f(m-2|p-2)\right)$$

$$+ (3|m-p+3)\,A\left((1,2,3,..h)^{(3)}\,f(3|m-p+3)\right).A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-3)}\,f(m-3|p-3)\right)$$

$$+ \;.$$

$$+ (h|m-p+h)\,A\left((1,2,3,..h)^{(h)}\,f(h|m-p+h)\right).A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-h)}\,f(m-h|p-h)\right)$$

Wir vervielfachen 70 mit α und 74 mit β, zählen beide Gleichungen zusammen und erhalten

$$75)\quad \left(\alpha+\frac{m\,.\,h}{n}\,\beta\right).\frac{n^{h|-1}}{1^{h|}}\,.\,A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right) =$$

$$= \left(\alpha+(0|m-p)\,\beta\right).A\left((1,2,3,..h)^{(0)}\,f(0|m-p)\right).A\left((h+1,h+2,..h)^{(p)}\,f(m|p)\right)$$

$$+ \left(\alpha+(1|m-p+1)\,\beta\right).A\left((1,2,3,..h)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right).A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$

$$+ \left(\alpha+(2|m-p+2)\,\beta\right).A\left((1,2,3,..h)^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right).A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-2)}\,f(m-2|p-2)\right)$$

$$+ \;.$$

$$+ \left(\alpha+(h|m-p+h)\,\beta\right).A\left((1,2,3,..h)^{(h)}\,f(h|m-p+h)\right).A\left((h+1,h+2,..n)^{(p-h)}\,f(m-h|p-h)\right)$$

Diese Gleichung ist sehr allgemein; wir können aus ihr mehrere besondere Fälle ziehen, indem wir einmal die obern, dann die untern Stellenzahlen gleich werden lassen, oder dadurch, dass wir den willkührlichen Grössen α und β bestimmte Werthe beilegen.

Digitized by Google

§. 8.

Die Verbindungen, welche wir im Anfange unserer Untersuchung mit

$$A\left((1,2,3,..n)^{(r)}\,f(m)\right)$$

bezeichnet haben, können auch noch unter anderer Gestalt erscheinen. Bei dieser Bezeichnung haben wir besonders die obern Stellenzahlen beachtet und die Elemente nach ihnen geordnet. Dies ist willkührlich, die Anordnung kann auch nach den untern Stellenzahlen geschehen.

Im letztern Falle müssen wir die Frage aufwerfen: welches Gesetz befolgen die oberen Stellenzahlen, wenn die Produkte nach den unteren gruppirt werden?

Bei den untern Stellenzahlen sind Wiederholungen und Versetzungen gestattet, bei den obern nicht. Eine einfache Betrachtung unserer Verbindungen genügt, sich zu überzeugen, dass bei einer Anordnung nach den untern Zahlen, in den obern weder Wiederholungen noch Versetzungen hervorgerufen werden, dass aber, je nach der Verschiedenheit der untern Zeichen, Klassen von Verbindungen entstehen, wo ein früheres Element wohl einem späteren, aber in einer anderen Klasse nachfolgen darf.

Etwas Aehnliches haben wir schon in den §§. 6 und 7 gehabt und dort die Wiederholung der ersten Klammer gebraucht, um diese besondere Anordnung der Elemente zu bezeichnen. Dasselbe Zeichen genügt auch hier; obschon wir mehr als zwei Klassen von Verbindungen haben, so ist doch das Gesetz der Veränderung der Elemente dasselbe.

Um an einem Beispiele die Anordnung nach den untern Stellenzahlen zu zeigen, sey $m=7$, $p=4$, $n=6$, so ist

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
A\left((1,2,3,4,5,6)^{(4)}f(7)\right) = {} & A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(3)}\begin{vmatrix} A_4^{(4)} \\ A_4^{(5)} \\ A_4^{(6)} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(4)}\begin{vmatrix} A_4^{(3)} \\ A_4^{(5)} \\ A_4^{(6)} \end{vmatrix} \\
& + A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(5)}\begin{vmatrix} A_4^{(3)} \\ A_4^{(4)} \\ A_4^{(6)} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_4^{(3)} \\ A_4^{(4)} \\ A_4^{(5)} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_1^{(4)}\begin{vmatrix} A_4^{(2)} \\ A_4^{(5)} \\ A_4^{(6)} \end{vmatrix} \\
& + A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_1^{(5)}\begin{vmatrix} A_4^{(2)} \\ A_4^{(4)} \\ A_4^{(6)} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_4^{(2)} \\ A_4^{(4)} \\ A_4^{(5)} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}.A_1^{(4)}.A_1^{(5)}\begin{vmatrix} A_4^{(2)} \\ A_4^{(3)} \\ A_4^{(6)} \end{vmatrix} \\
& + A_1^{(1)}.A_1^{(4)}.A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_4^{(2)} \\ A_4^{(3)} \\ A_4^{(5)} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}.A_1^{(5)}.A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_4^{(2)} \\ A_4^{(3)} \\ A_4^{(4)} \end{vmatrix} + A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_1^{(4)}\begin{vmatrix} A_4^{(1)} \\ A_4^{(5)} \\ A_4^{(6)} \end{vmatrix} \\
& + A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_1^{(5)}\begin{vmatrix} A_4^{(1)} \\ A_4^{(4)} \\ A_4^{(6)} \end{vmatrix} + A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_4^{(1)} \\ A_4^{(4)} \\ A_4^{(5)} \end{vmatrix} + A_1^{(2)}.A_1^{(4)}.A_1^{(5)}\begin{vmatrix} A_4^{(1)} \\ A_4^{(3)} \\ A_4^{(6)} \end{vmatrix} \\
& + A_1^{(2)}.A_1^{(4)}.A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_4^{(1)} \\ A_4^{(3)} \\ A_4^{(5)} \end{vmatrix} + A_1^{(2)}.A_1^{(5)}.A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_4^{(1)} \\ A_4^{(3)} \\ A_4^{(4)} \end{vmatrix} + A_1^{(3)}.A_1^{(4)}.A_1^{(5)}\begin{vmatrix} A_4^{(1)} \\ A_4^{(2)} \\ A_4^{(6)} \end{vmatrix} \\
& + A_1^{(3)}.A_1^{(4)}.A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_4^{(1)} \\ A_4^{(2)} \\ A_4^{(5)} \end{vmatrix} + A_1^{(3)}.A_1^{(5)}.A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_4^{(1)} \\ A_4^{(2)} \\ A_4^{(4)} \end{vmatrix} + A_1^{(4)}.A_1^{(5)}.A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_4^{(1)} \\ A_4^{(2)} \\ A_4^{(3)} \end{vmatrix} \\
& + A_1^{(1)}.A_1^{(2)}\begin{vmatrix} A_2^{(3)} & \begin{vmatrix} A_3^{(4)} \\ A_3^{(5)} \\ A_3^{(6)} \end{vmatrix} \\ A_2^{(4)} & \begin{vmatrix} A_3^{(3)} \\ A_3^{(5)} \\ A_3^{(6)} \end{vmatrix} \\ A_2^{(5)} & \begin{vmatrix} A_3^{(3)} \\ A_3^{(4)} \\ A_3^{(6)} \end{vmatrix} \\ A_2^{(6)} & \begin{vmatrix} A_3^{(3)} \\ A_3^{(4)} \\ A_3^{(5)} \end{vmatrix} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}.A_1^{(3)}\begin{vmatrix} A_2^{(2)} & \begin{vmatrix} A_3^{(4)} \\ A_3^{(5)} \\ A_3^{(6)} \end{vmatrix} \\ A_2^{(4)} & \begin{vmatrix} A_3^{(2)} \\ A_3^{(5)} \\ A_3^{(6)} \end{vmatrix} \\ A_2^{(5)} & \begin{vmatrix} A_3^{(2)} \\ A_3^{(4)} \\ A_3^{(6)} \end{vmatrix} \\ A_2^{(6)} & \begin{vmatrix} A_3^{(2)} \\ A_3^{(4)} \\ A_3^{(5)} \end{vmatrix} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}.A_1^{(4)}\begin{vmatrix} A_2^{(2)} & \begin{vmatrix} A_3^{(3)} \\ A_3^{(5)} \\ A_3^{(6)} \end{vmatrix} \\ A_2^{(3)} & \begin{vmatrix} A_3^{(2)} \\ A_3^{(5)} \\ A_3^{(6)} \end{vmatrix} \\ A_2^{(5)} & \begin{vmatrix} A_3^{(2)} \\ A_3^{(3)} \\ A_3^{(6)} \end{vmatrix} \\ A_2^{(6)} & \begin{vmatrix} A_3^{(2)} \\ A_3^{(3)} \\ A_3^{(5)} \end{vmatrix} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$+\ A_1^{(1)}\cdot A_1^{(5)}\begin{vmatrix} A_0^{(0)} & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(2)} & A_2^{(0)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(4)} & A_2^{(0)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(6)} & A_2^{(0)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(4)} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}\cdot A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_0^{(0)} & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_0^{(2)} & A_2^{(0)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_0^{(4)} & A_2^{(0)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_0^{(5)} & A_2^{(0)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(4)} \end{vmatrix} + A_1^{(2)}\cdot A_1^{(3)}\begin{vmatrix} A_0^{(1)} & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(5)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(4)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(5)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(6)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(5)} \end{vmatrix}$$

$$+\ A_1^{(2)}\cdot A_1^{(4)}\begin{vmatrix} A_0^{(1)} & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(5)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(3)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(5)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(5)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(6)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(5)} \end{vmatrix} + A_1^{(2)}\cdot A_1^{(5)}\begin{vmatrix} A_0^{(1)} & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(3)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(4)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_0^{(6)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(4)} \end{vmatrix} + A_1^{(2)}\cdot A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_0^{(1)} & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_0^{(3)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_0^{(4)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_0^{(5)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(4)} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$+\ A_1^{(3)}\cdot A_1^{(4)}\begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(5)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_2^{(2)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(5)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_2^{(5)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_2^{(6)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(5)} \end{vmatrix} + A_1^{(2)}\cdot A_1^{(5)}\begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_2^{(3)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_2^{(4)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_2^{(6)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(4)} \end{vmatrix} + A_1^{(2)}\cdot A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_2^{(3)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(4)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_2^{(4)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_2^{(5)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(4)} \end{vmatrix}$$

$$+\ A_1^{(4)}\cdot A_1^{(5)}\begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_2^{(2)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_2^{(3)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(6)} \\ A_2^{(6)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(3)} \end{vmatrix} + A_1^{(4)}\cdot A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_2^{(2)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_2^{(3)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(5)} \\ A_2^{(5)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(3)} \end{vmatrix} + A_1^{(5)}\cdot A_1^{(6)}\begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(4)} \\ A_2^{(2)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(3)} \\ & A_2^{(4)} \\ A_2^{(3)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(4)} \\ A_2^{(4)} & A_2^{(1)} \\ & A_2^{(2)} \\ & A_2^{(3)} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$+ A_1^{(1)} \times \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(3)}.A_4^{(4)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)}.A_5^{(5)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)}.A_6^{(6)} \\ A_2^{(2)}.A_4^{(4)}.A_5^{(5)} \\ A_2^{(2)}.A_4^{(4)}.A_6^{(6)} \\ A_2^{(2)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \\ A_3^{(3)}.A_4^{(4)}.A_5^{(5)} \\ A_3^{(3)}.A_4^{(4)}.A_6^{(6)} \\ A_3^{(3)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \\ A_4^{(4)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \end{vmatrix} + A_2^{(1)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(3)}.A_4^{(4)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)}.A_5^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)}.A_6^{(6)} \\ A_1^{(1)}.A_4^{(4)}.A_5^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_4^{(4)}.A_6^{(6)} \\ A_1^{(1)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \\ A_3^{(3)}.A_4^{(4)}.A_5^{(5)} \\ A_3^{(3)}.A_4^{(4)}.A_6^{(6)} \\ A_3^{(3)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \\ A_4^{(4)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \end{vmatrix} + A_3^{(2)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_4^{(4)} \\ A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_5^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_6^{(6)} \\ A_1^{(1)}.A_4^{(4)}.A_5^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_4^{(4)}.A_6^{(6)} \\ A_1^{(1)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \\ A_2^{(2)}.A_4^{(4)}.A_5^{(5)} \\ A_2^{(2)}.A_4^{(4)}.A_6^{(6)} \\ A_2^{(2)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \\ A_4^{(4)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \end{vmatrix}$$

$$+ A_4^{(4)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_3^{(3)} \\ A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_5^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_6^{(6)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)}.A_5^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)}.A_6^{(6)} \\ A_1^{(1)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)}.A_5^{(5)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)}.A_6^{(6)} \\ A_2^{(2)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \\ A_3^{(3)}.A_5^{(5)}.A_6^{(6)} \end{vmatrix} + A_5^{(5)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_3^{(3)} \\ A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_4^{(4)} \\ A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_6^{(6)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)}.A_4^{(4)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)}.A_6^{(6)} \\ A_1^{(1)}.A_4^{(4)}.A_6^{(6)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)}.A_4^{(4)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)}.A_6^{(6)} \\ A_2^{(2)}.A_4^{(4)}.A_6^{(6)} \\ A_3^{(3)}.A_4^{(4)}.A_6^{(6)} \end{vmatrix} + A_6^{(6)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_3^{(3)} \\ A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_4^{(4)} \\ A_1^{(1)}.A_2^{(2)}.A_5^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)}.A_4^{(4)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)}.A_5^{(5)} \\ A_1^{(1)}.A_4^{(4)}.A_5^{(5)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)}.A_4^{(4)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)}.A_5^{(5)} \\ A_2^{(2)}.A_4^{(4)}.A_5^{(5)} \\ A_3^{(3)}.A_4^{(4)}.A_5^{(5)} \end{vmatrix}$$

Wir können dies auf folgende Weise darstellen:

$$A_1\,((1,2,3)^{(1)} \cdot A_4\,((4,5,6)^{(1)}$$

$$A_1\,((1,2)^{(2)} \cdot A_3\,((3)^{(1)} \cdot A_5\,((4,5,6)^{(1)}$$

$$A_1\,((1)^{(1)} \cdot A_5\,((2,3,4,5,6)^{(3)}$$

Und ganz allgemein, wenn a_1 anzeigt, wie oft A_1 im Produkte vorhanden ist, und $a_2, a_3, \ldots a_{(m-p+1)}$ für $A_2, A_3, \ldots A_{m-p+1}$ dieselbe Bedeutung

Digitized by Google

haben, so wird jetzt statt der früheren Bezeichnung $A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right)$ die folgende dafür gesetzt werden können:

76) $A_{\cdot}((1,2,3,..a1)^{(a1)}\cdot A_{\cdot}((a1+1,a1+2,..a2-a1)^{(a2)}\cdot\ldots A_{m-p+1}((p,p+1,..n)^{(a(m-p+1))}$

wo die $a1, a2, .. a_{(m-p+1)}$ folgenden Gesetzen unterworfen sind:

77) $a1 + a2 + a3 + .. + a_{(m-p+1)} = p$

und

78) $1.a1 + 2.a2 + 3.a3 + .. (m-p+1).a_{(m-p+1)} = m$

Aus diesen Gleichungen können wir die meisten unserer früher gefundenen Gesetze wieder ableiten. Wenn wir 76 mit $a1$ vervielfachen, so können wir dieser Gleichung folgende Gestalt geben:

$A_{\cdot}^{(1)}\cdot A_{\cdot}((2,3,4,..a1)^{(a1-1)}\cdot A_{\cdot}((a1+1,..a2-a1)^{(a2)}\cdot\ldots A_{m-p+1}((p,p+1,..n)^{(a(m-p+1))}$

$A_{\cdot}^{(2)}\cdot A_{\cdot}((1,3,4,..a1)^{(a1-1)}\cdot A_{\cdot}((a1+1,..a2-a1)^{(a2)}\cdot\ldots A_{m-p+1}((p,p+1,..n)^{(a(m-p+1))}$

. . . . . .

$A_{\cdot}^{(n)}\cdot A((1,2,3,..a1-1)^{(a1-1)}\cdot A_{\cdot}((a1,a1+1,..a2-a1-1)^{(a2)}\cdot\ldots A_{m-p+1}((p,p+1,..n-1)^{(a(m-p+1))}$

Geben wir jetzt den a alle Werthe, welche die beiden Gleichungen 77 und 78 zulassen, so erhalten wir hieraus nach unserer früheren Bezeichnung:

$$A_{\cdot}^{(1)}\cdot A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1)\right)$$
$$+\,A_{\cdot}^{(2)}\cdot A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-1)\right)$$
$$+\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+\,A_{\cdot}^{(n)}\cdot A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}\,f\,(m-1)\right)$$

Auf gleiche Weise können wir, indem wir die Gleichung 76 mit $a2$ vervielfachen, die Elemente $A_{\cdot}^{(1)}, A_{\cdot}^{(2)}, \ldots A_{\cdot}^{(n)}$ trennen und erhalten

$$A_{\cdot}^{(1)}\cdot A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-2)\right)$$
$$A_{\cdot}^{(2)}\cdot A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-2)\right)$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$A_{\cdot}^{(n)}\cdot A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}\,f\,(m-2)\right)$$

Digitized by Google

Fahren wir so fort, so entstehen zuletzt, nach 77, alle Verbindungen p mal, und wir erhalten auf diese Art wieder, indem wir alle diese Ausdrücke vereinigen, die Gleichung 58.

Verfährt man auf dieselbe Weise, nur dass man zuerst die Gleichung 73 mit $1.a_1$, dann mit $2.a_2$ u. s. w. vervielfacht, so entsteht, wenn mit $1.a_1$ vervielfacht wird

$$\begin{aligned}
&1.A_1^{(1)} \cdot A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)} \int (m-1)\right)\\
+\ &1.A_1^{(2)} \cdot A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)} \int (m-1)\right)\\
+\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+\ &1.A_1^{(n)} \cdot A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)} \int (m-1)\right)
\end{aligned}$$

Wenn mit $2.a_2$ vervielfacht wird

$$\begin{aligned}
&2.A_1^{(1)} \cdot A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)} \int (m-2)\right)\\
+\ &2.A_1^{(2)} \cdot A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)} \int (m-2)\right)\\
+\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+\ &2.A_1^{(n)} \cdot A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)} \int (m-2)\right)
\end{aligned}$$

u. s. w.

Zuletzt, wenn mit $(m-p+1)\ a_{(m-p+1)}$ vervielfacht wird

$$\begin{aligned}
&(m-p+1)\ A_{m-p+1}^{(1)} \cdot A\left((2,3,4,\ldots n)^{(p-1)} \int (p-1)\right)\\
+\ &(m-p+1)\ A_{m-p+1}^{(2)} \cdot A\left((1,3,4,\ldots n)^{(p-1)} \int (p-1)\right)\\
+\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+\ &(m-p+1)\ A_{m-p+1}^{(n)} \cdot A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)} \int (p-1)\right)
\end{aligned}$$

Vereiniget man alle diese Ausdrücke, so entsteht jede Verbindung

$$1.a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + \ldots + (m-p+1).a_{(m-p+1)} = m$$

mal. Wir erhalten hierdurch die Gleichung 60, welche wir früher ohne Beweis gegeben haben.

Digitized by Google

§. 9.

Die Betrachtungen des vorigen §. setzen uns in den Stand, eine Frage, welche bis jetzt selbst bei den gemeinen Verbindungen in sehr specieller Form gegeben wurde, in ihrer ganzen Allgemeinheit beantworten zu können. Wenn wir auch Vorschriften besitzen, welche zeigen, wie die Verbindungen zu bestimmten Summen aus den Elementen

$$A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$$

auf andere derselben Art aus den Elementen

$$A_0, A_2, A_4, A_6, \ldots$$

zurückgebracht werden können, so ist dies doch Alles, und kaum eine Andeutung der Frage: Wie können Verbindungen zu bestimmten Summen aus allen Elementen durch solche aus beschränkten Elementen dargestellt werden?

Wir fassen den Gegenstand noch allgemeiner auf und suchen, aus der Reihe der allgemeinsten Verbindungen, die gedoppelten Verbindungen ohne Wiederholung zu bestimmten Summen mit unbeschränkten untern Stellenzahlen durch solche darzustellen, welche Beschränkungen unterworfen sind.

In den Verbindungen, welche wir durch die Gleichung 76 dargestellt haben, kann ein Element mit einer bestimmten unteren Stellenzahl s entweder gar nicht seyn, oder nur ein- oder zweimal u. s. w.; wir können deswegen dem s die Werthe 0, 1, 2, 3,... geben und dies Element A_s ganz aus den Verbindungen scheiden.

Wir erhalten hierdurch

$$A_0\,((1,2,3,..a1)^{(a_1)}\cdot A_1\,((a1+1,..a2-a1)^{(a_2)}\ldots A_{m-p+1}\,((p,p+1,..n)^{(a_{(m-p+1)})}$$

wo

Digitized by Google

$$a1 + a2 + .. + a^{(s-1)} + a^{(s+1)} + .. + a^{(m-p+1)} = p$$

$$1.a1 + 2.a2 + .. + (s-1).a^{(s-1)} + (s+1).a^{(s+1)} + .. + (m-p+1)\,a^{(m-p+1)} = m$$

und

$$A_1((1)^{(1)}) . A_2((2,3,4,..a1+1)^{(a1)}) . A_3((a1+2,..a2-a1+1)^{(a2)}) ... A_{m-p+1}((p+1,p+2..n)^{(a(m-p+1))})$$

wo

$$a1 + a2 + .. + a^{(s-1)} + a^{(s+1)} + .. + a^{(m-p+1)} = p-1$$

$$1.a1 + 2.a2 + .. + (s-1).a^{(s-1)} + (s+1).a^{(s+1)} + .. + (m-p+1)\,a^{(m-p+1)} = m-s$$

u. s. w.

Dies können wir nach unserer früheren Bezeichnung auf folgende Art darstellen:

$$79)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)} f(m)\right) =$$
$$= A\left(((0)^{(0)}\ f\ (0s)(s)\right) . A\left(((1,2,3,..n)^{(p)}\ f\ (m)(1,2,3,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$+ A\left(((1)^{(1)}\ f\ (1s)(s)\right) . A\left(((2,3,4,..n)^{(p-1)} f(m-s)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$+ A\left(((1,2)^{(2)} f(2s)(s)\right) . A\left(((3,4,5,..n)^{(p-2)} f(m-2s)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$+ . . . . . .$$

Diese Reihe bricht ab, wenn $m - qs = o$ oder eine negetive Zahl wird.

Nehmen wir hierin an, es seyen die obern Stellenzahlen gleich, so wird, wegen der Veränderung durch (angedeutet, das zweite Glied $\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}}$, das dritte $\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}}$, u. s. w. mal entstehen. Die Anzahl der Verbindungen im zweiten Gliede ist ferner $= \frac{(n-1)^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}$, im dritten $= \frac{(n-2)^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}$ u. s. w.

Nun ist

$$\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot \frac{(n-1)^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}} = \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{p^{s|-1}}{1^{s|1}}$$

$$\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot \frac{(n-2)^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}} = \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{p^{s|-1}}{1^{s|1}}$$

u. s. w.

Digitized by Google

Nimmt man nun von beiden Seiten den Faktor $\frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}$ hinweg, so bleibt

$$80)\quad A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)} = \frac{p^{0|-1}}{1^{0|1}}\cdot(A_1)^0\cdot A\left(f(m)\,(1,2,3,..s-1,s+1,..)\right)^{(p)}$$
$$+\frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot(A_1)^1\cdot A\left(f(m-s)\,(1,2,3,..s-1,s+1,..)\right)^{(p-1)}$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot(A_1)^2\cdot A\left(f(m-2s)\,(1,2,3,..s-1,s+1,..)\right)^{(p-2)}$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Ist hierin $s=1$, so wird

$$81)\quad A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)} = \frac{p^{0|-1}}{1^{0|1}}\cdot(A_1)^0\cdot A\left(f(m)\,(2,3,4,..)\right)^{(p)}$$
$$+\frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot(A_1)^1\cdot A\left(f(m-1)\,(2,3,4,..)\right)^{(p-1)}$$
$$+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot(A_1)^2\cdot A\left(f(m-2)\,(2,3,4,..)\right)^{(p-2)}$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+\frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot(A_1)^p\cdot A\left(f(m-p)\,(2,3,4,..)\right)^{(0)}$$

Im Falle, wo $2.p$ grösser als m, fängt diese Reihe mit

$$\frac{p^{2p-m|-1}}{1^{2p-m|1}}\cdot(A_1)^{2p-m}\cdot A\left(f(2m-2p)\,(2,3,4,..)\right)^{(m-p)}$$

an.

Wir trennen in der Gleichung 79 auch das untere Element $s+1$, und erhalten

$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\,(1,2,..s-1,s+2,..)\right)$$
$$+A\left(((1)^{(1)}f(s|s+1)\,(s,s+1)\right)\cdot A\left(((2,3,4,..n)^{(p-1)}f(m-s|m-s-1)\,(1,2,..s-1,s+2,..)\right)$$
$$+A\left(((1,2)^{(2)}f(2s|2s+2)\,(s,s+1)\right)\cdot A\left(((3,4,5,..n)^{(p-2)}f(m-2s|m-2s-2)\,(1,2,..s-1,s+2,..)\right)$$
$$+A\left(((1,2,3)^{(3)}f(3s|3s+3)\,(s,s+1)\right)\cdot A\left(((4,5,..n)^{(p-3)}f(m-3s|m-3s-3)\,(1,2,..s-1,s+2,..)\right)$$
$$+\ .$$

Indem wir so weiter gehen, gelangen wir zuletzt zur Gleichung

Digitized by Google

82) $$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\int(m)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\int(m)\,(1,2,..s-1,\,s+q\,..)\right)$$
$$+A\left(((1)^{(1)}\int(s|s+q-1)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)\cdot A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)}\int(m-s|m-s-q+1)\,(1,2,..s-1,\,s+q,..)\right)$$
$$+A\left(((1,2)^{(2)}\int(2s|2s+2q-2)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)\cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p-2)}\int(m-2s|m-2s-2q+2)\,(1,2,..s-1,s+q,..)\right)$$
$$+A\left(((1,2,3)^{(3)}\int(3s|3s+3q-3)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)\cdot A\left((4,5,6,..n)^{(p-3)}\int(m-3s|m-3s-3q+3)\,(1,2,..s-1,s+q,..)\right)$$
$$+\ .$$

Fehlen alle höhern Elemente, so entsteht

83) $$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\int(m)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\int(m)\,(1,2,..s-1)\right)$$
$$+\ A\left(((1)^{(1)}\int(s|m-p+1)\,(s,s+1,..)\right)\cdot A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)}\int(m-s|p-1)\,(1,2,..s-1)\right)$$
$$+\ A\left(((1,2)^{(2)}\int(2s|m-p+2)\,(s,s+1,..)\right)\cdot A\left((3,4,..n)^{(p-2)}\int(m-2s|p-2)\,(1,2,..s-1)\right)$$
$$+\ A\left(((1,2,3)^{(3)}\int(3s|m-p+3)\,(s,s+1,..)\right)\cdot A\left((4,5,..n)^{(p-3)}\int(m-3s|p-3)\,(1,2,..s-1)\right)$$
$$+\ .$$

Setzen wir in 82 $s=1$ und $p=s$, so wird

84) $$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\int(m)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\int(m)\,(s+1,\,s+2,..)\right)$$
$$+\ A\left(((1)^{(1)}\int(1|s)\,(1,2,..s)\right)\cdot A\left((2,3,..n)^{(p-1)}\int(m-1|m-s)\,(s+1,\,s+2,..)\right)$$
$$+\ A\left(((1,2)^{(2)}\int(2|2s)\,(1,2,..s)\right)\cdot A\left((3,4,..n)^{(p-2)}\int(m-2|m-2s)\,(s+1,\,s+2,..)\right)$$
$$+\ A\left(((1,2,3)^{(3)}\int(3|3s)\,(1,2,..s)\right)\cdot A\left((4,5,..n)^{(p-3)}\int(m-3|m-3s)\,(s+1,\,s+2,..)\right)$$
$$+\ .$$

Digitized by Google

Wir haben die Elemente ihrer Folge nach $s, s+1, ..$ oder $s, s-1, s-2$ aus den anfänglichen Verbindungen gehoben, wir sind aber bei diesem Geschäfte an keine bestimmte Ordnung gebunden und man hätte eben so gut die Elemente ganz willkührlich ausheben können.

Wir setzen jetzt in 82, 83, 84 die obern Stellenzahlen gleich und erhalten, aus 82

$$85)\quad A\left(\int(m)(1,2,3,..)\right)^{(p)} = \frac{P^{o|-s}}{1^{o|s}} A\left(\int(m)(1,2,..s-1,s+q,..)\right)^{(p)}$$
$$+\frac{P^{s|-s}}{1^{s|s}} A\left(\int(s|s+q-1)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(1)} . A\left(\int(m-s|m-s-q+1)(1,2,..s-1,s+q,..)\right)^{(p-1)}$$
$$+\frac{P^{2s|-s}}{1^{2s|s}} A\left(\int(2s|2s+2q-2)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(2)} . A\left(\int(m-2s|m-2s-2q+2)(1,2,..s-1,s+q,..)\right)^{(p-2)}$$
$$+\frac{P^{3s|-s}}{1^{3s|s}} A\left(\int(3s|3s+3q-3)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(3)} . A\left(\int(m-3s|m-3s-3q+3)(1,2,..s-1,s+q,..)\right)^{(p-3)}$$
$$+ \quad . \quad . \quad .

§. 10.

Wir legen uns jetzt die umgekehrte Aufgabe vor und fragen: Wie können unsere gedoppelten Verbindungen bei Beschränktheit der untern Stellenzahlen durch andere dargestellt werden, in welchen alle Elemente enthalten sind?

Aus der Gleichung 79 ziehen wir die folgende.

88) $$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right)$$
$$- A\left(((1)^{(1)}\,f\,(s)\,(s)\right) \cdot A\left(((2,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$- A\left(((1,2)^{(2)}\,f\,(2s)\,(s)\right) \cdot A\left(((3,4,5,..n)^{(p-2)}\,f\,(m-2s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$- A\left(((1,2,3)^{(3)}\,f\,(3s)\,(s)\right) \cdot A\left(((4,5,6,..n)^{(p-3)}\,f\,(m-3s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nach dieser Vorschrift lassen sich nun Gleichungen bilden, durch welche wir im Stande sind, das erste negative Glied durch andere Ausdrücke zu ersetzen, welchen keine untere Stellenzahlen fehlen.

Es wird

$$A\left(((1)^{(1)}\,f\,(s)\,(s)\right) \cdot A\left(((2,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right) =$$
$$= A\left(((1)^{(1)}\,f\,(s)\,(s)\right) \cdot A\left(((2,3,4,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-s)\right)$$
$$- 2 \cdot A\left(((1,2)^{(2)}\,f\,(2s)\,(s)\right) \cdot A\left(((3,4,5,..n)^{(p-2)}\,f\,(m-2s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$- 3 \cdot A\left(((1,2,3)^{(3)}\,f\,(3s)\,(s)\right) \cdot A\left(((4,5,6,..n)^{(p-3)}\,f\,(m-3s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wird dieser Werth in die Gleichung 88 eingeführt, so entsteht

$$A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f\,(m)\right)$$
$$- A\left(((1)^{(1)}\,f\,(s)\,(s)\right) \cdot A\left(((2,3,..n)^{(p-1)}\,f\,(m-s)\right) \cdot$$
$$+ 1 \cdot A\left(((1,2)^{(2)}\,f\,(2s)\,(s)\right) \cdot A\left(((3,4,..n)^{(p-2)}\,f\,(m-2s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$+ 2 \cdot A\left(((1,2,3)^{(3)}\,f\,(3s)\,(s)\right) \cdot A\left(((4,5,..n)^{(p-3)}\,f\,(m-3s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

In dieser Gleichung bringen wir jetzt auf gleiche Art das dritte Glied weg und erhalten

$$\begin{aligned}
A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right) &= A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right)\\
&- A\left(((1)^{(1)}\,f(s)\,(s)\right)\cdot A\left((2,3,..n)^{(p-1)}\,f(m-s)\right)\\
&+ A\left(((1,2)^{(2)}\,f(2s)\,(s)\right)\cdot A\left((3,4,..n)^{(p-2)}\,f(m-2s)\right)\\
-\,1\,.\,A\left(((1,2,3)^{(3)}\,f(3s)\,(s)\right)\cdot A\left((4,5,..n)^{(p-3)}\,f(m-3s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)\\
-\,3\,.\,A\left(((1,2,3,4)^{(4)}\,f(4s)\,(s)\right)\cdot A\left((5,6,..n)^{(p-4)}\,f(m-4s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)\\
-\,.
\end{aligned}$$

So können wir nach und nach alle Glieder entfernen, welchen das Element A_s fehlt, und erhalten zuletzt

$$\begin{aligned}
89)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right) &= A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right)\\
&- A\left(((1)^{(1)}\,f(s)\,(s)\right)\cdot A\left((2,3,..n)^{(p-1)}\,f(m-s)\right)\\
&+ A\left(((1,2)^{(2)}\,f(2s)\,(s)\right)\cdot A\left((3,4,..n)^{(p-2)}\,f(m-2s)\right)\\
&- A\left(((1,2,3)^{(3)}f(3s)(s)\right)\cdot A\left((4,5,..n)^{(p-3)}\,f(m-3s)\right)\\
&+ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.
\end{aligned}$$

Lassen wir hierin die Verschiedenheit der obern Stellenzahlen verschwinden, so wird

$$\begin{aligned}
90)\quad A\left(f(m)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)^{(p)} &= \frac{P^{\alpha|-1}}{1^{\alpha|1}}\cdot(A_s)^{\alpha}\cdot A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)}\\
&- \frac{P^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot(A_s)^{1}\cdot A\left(f(m-s)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-1)}\\
&+ \frac{P^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot(A_s)^{2}\cdot A\left(f(m-2s)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-2)}\\
&- .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.
\end{aligned}$$

Ist auch $s=1$, so ist

Digitized by Google

$$91)\quad A\left(f(m)\,(2,3,4,..)\right)^{(p)} = \frac{P^{0|-1}}{1^{0|1}}\cdot(A_1)^0\cdot A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)}$$
$$-\frac{P^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot(A_1)^1\cdot A\left(f(m-1)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-1)}$$
$$+\frac{P^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot(A_1)^2\cdot A\left(f(m-2)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-2)}$$
$$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$(-)^p\cdot\frac{P^{p|-1}}{1^{p|1}}\cdot(A_1)^p\cdot A\left(f(m-p)\,(1,2,3,..)\right)^{(0)}$$

Wir lassen jetzt in der Gleichung 89 das Element $A_{1,1}$ fehlen und ersetzen die Glieder zur Rechten nach demselben Gesetze, so entsteht

$$92)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\,(1,2,..s-1,s+2,..)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right)$$
$$-A\left(((1)^{(1)}\,f(s|s+1)\,(s,s+1)\right)\cdot A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)}\,f(m-s|m-s-1)\right)$$
$$+A\left(((1,2)^{(2)}\,f(2s|2s+2)\,(s,s+1)\right)\cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p-2)}\,f(m-2s|m-2s-2)\right)$$
$$-A\left(((1,2,3)^{(3)}\,f(3s|3s+3)\,(s,s+1)\right)\cdot A\left((4,5,6,..n)^{(p-3)}\,f(m-3s|m-3s-3)\right)$$
$$+\ .$$

Gehen wir auf diesem Wege weiter, so gelangen wir zuletzt zu der allgemeinen Gleichung:

$$93)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\,(1,2,..s-1,s+q,..)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right)$$
$$-A\left(((1)^{(1)}\,f(s|s+q-1)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)\cdot A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)}\,f(m-s|m-s-q+1)\right)$$
$$+A\left(((1,2)^{(2)}\,f(2s|2s+2q-2)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)\cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p-2)}\,f(m-2s|m-2s-2q+2)\right)$$
$$-A\left(((1,2,3)^{(3)}\,f(3s|3s+3q-3)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)\cdot A\left((4,5,6,..n)^{(p-3)}\,f(m-3s|m-3s-3q+3)\right)$$
$$+\ .$$

Für den besondern Fall der Gleichheit der obern Stellenzahlen erhält man

$$94)\quad A\left(f(m)\,(1,2,..s-1,s+q,..)\right)^{(p)} = A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)}$$
$$-\frac{P^{1|-1}}{1^{1,1}}A\left(f(s|s+q-1)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(1)}\cdot A\left(f(m-s|m-s-q+1)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-1)}$$
$$+\frac{P^{2|-1}}{1^{2|1}}A\left(f(2s|2s+2q-2)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(2)}\cdot A\left(f(m-2s|m-2s-2q+2)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-2)}$$
$$-\frac{P^{3|-1}}{1^{3|1}}A\left(f(3s|3s+3q-3)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(3)}\cdot A\left(f(m-3s|m-3s-3q+3)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-3)}$$
$$+\ .$$

Digitized by Google

Fehlen die höchsten Elemente von s an, dieses eingeschlossen, so wird aus 93

$$95)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\,(1,2,..s-1)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right)$$
$$- A\left((1)^{(1)}\,f(s|m-p+1)\,(s,s+1,..)\right)\cdot A\left((2,3,4,..n)^{(p-1)}\,f(m-s|p-1)\right)$$
$$+ A\left((1,2)^{(2)}\,f(2s|m-p+2)\,(s,s+1,..)\right)\cdot A\left((3,4,5,..n)^{(p-2)}\,f(m-2s|p-2)\right)$$
$$- A\left((1,2,3)^{(3)}\,f(3s|m-p+3)\,(s,s+1,..)\right)\cdot A\left((4,5,6,..n)^{(p-3)}\,f(m-3s|p-3)\right)$$
$$+ \;.$$

Ist aber in derselben Gleichung $s=1$ und $q=s$, so entsteht

$$96)\quad A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\,(s+1,s+2,..)\right) = A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(m)\right)$$
$$- A\left((1)^{(1)}\,f(1|s)\,(1,2,..s)\right)\cdot A\left((2,3,..n)^{(p-1)}\,f(m-1|m-s)\right)$$
$$+ A\left((1,2)^{(2)}\,f(2|2s)\,(1,2,..s)\right)\cdot A\left((3,4,..n)^{(p-2)}\,f(m-2|m-2s)\right)$$
$$- A\left((1,2,3)^{(3)}\,f(3|3s)\,(1,2,..s)\right)\cdot A\left((4,5,..n)^{(p-3)}\,f(m-3|m-3s)\right)$$
$$+ \;.$$

Wo also die ersten s Elemente fehlen. Wir lassen in 95 die Verschiedenheit der obern Stellenzahlen verschwinden und erhalten

$$97)\quad A\left(f(m)\,(1,2,3,..s-1)\right)^{(p)} = A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)}$$
$$- \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}}\,A\left(f(s|m-p+1)\,(s,s+1,..)\right)^{(1)}\cdot A\left(f(m-s|p-1)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-1)}$$
$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\,A\left(f(2s|m-p+2)\,(s,s+1,..)\right)^{(2)}\cdot A\left(f(m-2s|p-2)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-2)}$$
$$- \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}\,A\left(f(3s|m-p+3)\,(s,s+1,..)\right)^{(3)}\cdot A\left(f(m-3s|p-3)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-3)}$$
$$+ \;.$$

Bei derselben Annahme erhalten wir aus 96

$$98)\quad A\left(f(m)\,(s+1,s+2,..)\right)^{(p)} = A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)}$$
$$- \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}}\,A\left(f(1|s)\,(1,2,3,..s)\right)^{(1)}\cdot A\left(f(m-1|m-s)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-1)}$$
$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\,A\left(f(2|2s)\,(1,2,3,..s)\right)^{(2)}\cdot A\left(f(m-2|m-2s)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-2)}$$
$$- \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}\,A\left(f(3|3s)\,(1,2,3,..s)\right)^{(3)}\cdot A\left(f(m-3|m-3s)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-3)}$$
$$+ \;.$$

Digitized by Google

§. 11.

Wir haben früher, in der Gleichung 22, die Anzahl der Verbindungen gefunden, welche zu bestimmten Summen gemacht werden können, wenn die Zahl der Elemente unbeschränkt ist. Unsere Gleichung 97 gibt uns Veranlassung, die Zahl der Verbindungen aufzusuchen, wenn nur die ersten $s-1$ Elemente darin erscheinen dürfen.

Eine einfache Betrachtung zeigt, dass

99) Anzahl der Verbindungen begriffen in $A\left(\int(r)(s,s+1,..)\right)^{(k)} =$

$$= \text{Anz. d. Verbind. begr. in } \left(\int(r-ks+k)(1,2,3,..)\right)^{(k)}$$

$$= \frac{(r-ks+k-1)^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}$$

Beachten wir dies Gesetz, so erhalten wir für die $(k+1)$te Horizontalreihe in 97

$$(-)^k \cdot \frac{p^{k|-1}}{1^{k|1}} \cdot \left(\frac{(k-1)^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} \cdot \frac{(m-ks-1)^{p-k-1|-1}}{1^{p-k-1|1}} \right.$$

$$+ \frac{(k)^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} \cdot \frac{(m-ks-2)^{p-k-1|-1}}{1^{p-k-1|1}}$$

$$+ \frac{(k+1)^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} \cdot \frac{(m-ks-3)^{p-k-1|-1}}{1^{p-k-1|1}}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\left. + \frac{(m-p-ks+2k-1)^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} \cdot \frac{(p-k-1)^{p-k-1|-1}}{1^{p-k-1|1}} \right)$$

Die Summe dieser Reihe kann leicht nach der 9ten Abhandlung der Analysis gefunden werden, sie ist

$$(-)^k \cdot \frac{p^{k|-1}}{1^{k|1}} \cdot \frac{(m-ks+k-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

Setzen wir nun $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ so wird

Digitized by Google

100) Anzahl der Verbindungen begriffen in $A\left(\int(m)(1,2,3,..s-1)\right)^{(p)} =$

$$= \frac{p^{o|-1}}{1^{o|1}} \cdot \frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

$$- \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot \frac{(m-s)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-2s+1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

$$- \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{(m-3s+2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Es ist ferner

Anz. von $A\left(\int(m)(1,2,3,..q)\right)^{(p)}$ = Anz. von $A\left(\int(m+ps-p)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(p)}$

oder

101) Anz. von $A\left(\int(m)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(p)}$ = Anz. von $A\left(\int(m-ps+p)(1,2,3,..q)\right)^{(p)}$

Setzt man nun in 100 $s = q+1$ und $m = m-ps+p$, so wird

102) Anz. von $A\left(\int(m)(s, s+1, s+2, ..s+q-1)\right)^{(p)} =$

$$= \frac{p^{o|-1}}{1^{o|1}} \cdot \frac{(m-ps+p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

$$- \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot \frac{(m-ps+p-q-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-ps+p-2q-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

$$- \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{(m-ps+p-3q-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Digitized by Google

THEORIE
DER GEDOPPELTEN
VERBINDUNGEN
mit
Wiederholung zu bestimmten Summen.

§. 12.

Wie in der vorigen Abhandlung lassen sich auch hier die Verbindungen dargestellt durch

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right)$$

in zwei Theile zerlegen, in einen, welcher ein bestimmtes Element $A^{(s)}$ nicht enthält, und in einen andern, worin es enthalten ist, und folglich davon getrennt werden kann. Den ersten Theil bezeichnen wir durch

$$A\left([1,2,..s-1,\ s+1,..n]^{(p)}\,f(m)\right)$$

der andere zerfällt, je nachdem er $A^{(s)}_{,}$, $A^{(s)}_{,}$,... $A^{(s)}_{m-p+,}$ enthält, in mehrere Theile. Z. B. wenn $p=4$, $n=3$, $m=6$ und $s=3$ ist, so ist der zweite Theil

Digitized by Google

$$= A_1^{(2)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_3^{(1)} \\ 1\ 2\ 2 \\ 1\ 3\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 1 \\ 3\ 1\ 1 \end{vmatrix} + A_2^{(2)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_2^{(1)} \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 1 \end{vmatrix} + A_3^{(2)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_1^{(1)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_1^{(2)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(2)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_1^{(2)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(3)}.A_1^{(3)}.A_1^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_3^{(2)} \\ 1\ 2\ 2 \\ 1\ 3\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 1 \\ 3\ 1\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_2^{(2)} \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_3^{(3)} \\ 1\ 2\ 2 \\ 1\ 3\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 1 \\ 3\ 1\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_2^{(2)} \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(2)} \\ 1\ 2\ 2 \\ 1\ 3\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 1 \\ 3\ 1\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_2^{(1)} \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(3)} \\ 1\ 2\ 2 \\ 1\ 3\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 1 \\ 3\ 1\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_2^{(2)} \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_3^{(3)} \\ 1\ 2\ 2 \\ 1\ 3\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 1 \\ 3\ 1\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_2^{(2)} \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_3^{(2)} \\ 1\ 2\ 2 \\ 1\ 3\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 1 \\ 3\ 1\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_2^{(3)} \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_3^{(3)} \\ 1\ 2\ 2 \\ 1\ 3\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 1 \\ 3\ 1\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_2^{(3)} \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(3)}.A_1^{(3)}.A_3^{(3)} \\ 1\ 2\ 2 \\ 1\ 3\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 1 \\ 3\ 1\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(3)}.A_1^{(3)}.A_2^{(3)} \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 1 \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

Die Verbindungen, welche bei $A_{\cdot}^{(3)}$ stehen, sind die gedoppelten Verbindungen mit Wiederholungen zur Summe 5 aus allen Elementen zu 3 Elementen; dieselben Verbindungen haben wir bei $A_{\cdot}^{(2)}$ nur zur Summe 4 u. s. w., so dass

$$\begin{aligned} A\left([1,2,3]^{(4)} f(6)\right) = A\left([1,2]^{(4)} f(6)\right) &+ A\left([1,2,3]^{(2)} f(5)\right) \cdot A_{\cdot}^{(1)} \\ &+ A\left([1,2,3]^{(3)} f(4)\right) \cdot A_{\cdot}^{(1)} \\ &+ A\left([1,2,3]^{(3)} f(3)\right) \cdot A_{\cdot}^{(1)} \end{aligned}$$

Ganz allgemein ist

$$\begin{aligned} 103)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) &= A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p)} f(m)\right) \\ &+ A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-1)\right) \cdot A_{\cdot}^{(0)} \\ &+ A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-2)\right) \cdot A_{\cdot}^{(0)} \\ &+ A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-3)\right) \cdot A_{\cdot}^{(0)} \\ &+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &+ A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)} f(p-1)\right) \cdot A_{m-p+1}^{(0)} \\ &= A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p)} f(m)\right) \\ &+ A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) \cdot A_{\cdot|m-p+1}^{(0)} \end{aligned}$$

Oder auch

$$\begin{aligned} 104)\quad A\left([1,2,3,..s-1,s+1,..n]^{(p)} f(m)\right) &= A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) \\ &- A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) \cdot A_{\cdot|m-p+1}^{(0)} \end{aligned}$$

Nach 103 bilden wir jetzt die folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) = A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) + A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s)}_{1\,|m-p+1}$$

$$A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) = A\left([1,2,..s-1,s+2,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) + A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s+1)}_{1\,|m-p+1}$$

$$A\left([1,2,..s-1,s+2,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) = A\left([1,2,..s-1,s+3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) + A\left([1,2,..s-1,s+2,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s+2)}_{1\,|m-p+1}$$

. . . . . .

$$A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) = A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) + A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s+h-1)}_{1\,|m-p+1}$$

und zählen sie zusammen, so wird

105) $$\begin{aligned} A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) = {} & A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s)}_{1\,|m-p+1} \\ & + A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s+1)}_{1\,|m-p+1} \\ & + A\left([1,2,..s-1,s+2,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s+2)}_{1\,|m-p+1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s+h-1)}_{1\,|m-p+1} \\ & + A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise findet man

106) $$\begin{aligned} A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) = {} & A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s)}_{1\,|m-p+1} \\ & + A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s-1)}_{1\,|m-p+1} \\ & + A\left([1,2,..s-2,s+1,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s-2)}_{1\,|m-p+1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A\left([1,2,..s-h+1,s+1,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(s-h+1)}_{1\,|m-p+1} \\ & + A\left([1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) \end{aligned}$$

Wird in 105 $s=1$ und $h=n$, so wird

Digitized by Google

$$107)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) = A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(1)}_{|m-p+1}$$
$$+ A\left([2,3,4,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(2)}_{|m-p+1}$$
$$+ A\left([3,4,5,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(3)}_{|m-p+1}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left([n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(n)}_{|m-p+1}$$

Setzt man aber in 106 $s=n$ und $h=n$, so entsteht

$$108)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) = A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(n)}_{|m-p+1}$$
$$+ A\left([1,2,3,..n-1]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(n-1)}_{|m-p+1}$$
$$+ A\left([1,2,3,..n-2]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(n-2)}_{|m-p+1}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left([1]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)\cdot A^{(1)}_{|m-p+1}$$

Lassen wir die unteren Stellenzahlen gleich werden, so entsteht auf der linken Seite der Ausdruck $A[1,2,3,..n]^{(p)}$, $\frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}}$ mal. In allen Horizontalreihen entstehen aber die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen so oft, als die Reihe

$$\frac{(m-2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}} + \frac{(m-3)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}} + \frac{(m-4)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}} + .. + \frac{(p-2)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}}$$

zeigt, deren Summe $= \frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|}}$ ist, so dass nach Hinwegnahme dieses Faktors von beiden Seiten bleibt

$$109)\quad A[1,2,3,..n]^{(p)} = A[1,2,3,..n]^{(p-1)}\cdot A^{(n)}$$
$$+ A[1,2,3,..n-1]^{(p-1)}\cdot A^{(n-1)}$$
$$+ A[1,2,3,..n-2]^{(p-1)}\cdot A^{(n-2)}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A[1]^{(p-1)}\cdot A^{(1)}$$

$$= A[1,2,3,..n]^{(p-1)}\cdot A^{(1)}$$
$$+ A[2,3,4,..n]^{(p-1)}\cdot A^{(2)}$$
$$+ A[3,4,5,..n]^{(p-1)}\cdot A^{(3)}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A[n]^{(p-1)}\cdot A^{(n)}$$

Digitized by Google

Die zurücklaufenden Bildungsweisen, welche wir bis jetzt gefunden haben, entsprechen denen im §. 1. Wir benutzen die Gleichungen 109 zur Auffindung der Anzahl der geordneten Verbindungen mit Wiederholung und setzen, es sey dieselbe aus n Elementen zu p Elementen $= [n,p]$, so ist

$$[n,p] = [n,p-1] + [n-1,p-1] + [n-2,p-1] + \ldots + [1,p-1]$$

beachtet man, dass $[n,1] = n$ und setzt hierin $p = 2$, so wird

$$[n,2] = [n,1] + [n-1,1] + [n-2,1] + \ldots + [1,1]$$
$$= \frac{n}{1} + \frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{1} + \ldots + \frac{1}{1}$$
$$= \frac{n(n+1)}{1.2} = \frac{n^{\underline{2}|}}{1^{\underline{2}|}}$$

Setzt man $p = 3$, so entsteht

$$[n,3] = [n,2] + [n-1,2] + [n-2,2] + \ldots + [1,2]$$
$$= \frac{n^{\underline{2}|}}{1^{\underline{2}|}} + \frac{(n-1)^{\underline{2}|}}{1^{\underline{2}|}} + \frac{(n-2)^{\underline{2}|}}{1^{\underline{2}|}} + \ldots + \frac{1^{\underline{2}|}}{1^{\underline{2}|}}$$
$$= \frac{n^{\underline{3}|}}{1^{\underline{3}|}}$$

Und ganz allgemein

$$[n,p] = \frac{n^{\underline{p-1}|}}{1^{\underline{p-1}|}} + \frac{(n-1)^{\underline{p-1}|}}{1^{\underline{p-1}|}} + \frac{(n-2)^{\underline{p-1}|}}{1^{\underline{p-1}|}} + \ldots + \frac{1^{\underline{p-1}|}}{1^{\underline{p-1}|}}$$
$$= \frac{n^{\underline{p}|}}{1^{\underline{p}|}}$$

daher

110) Anzahl der Verbindungen begriffen in $A\,[1,2,3,\ldots n]^{(p)} = \frac{n^{\underline{p}|}}{1^{\underline{p}|}}$

und

111) Anzahl der Verbindungen begriffen in $A\left([1,2,3,\ldots n]^{(p)}\,f(m)\right) =$
$$= \frac{n^{\underline{p}|}}{1^{\underline{p}|}} \cdot \frac{(m-1)^{\underline{p-1}|}}{1^{\underline{p-1}|}}$$

Setzen wir in den Gleichungen 107 und 108 die oberen Stellenzahlen gleich, so werden alle Horizontalreihen gleich, nur entstehen sie nicht gleich oft;

Digitized by Google

die erste ist vervielfacht mit $\frac{n^{[p-1]}}{1^{[p]}}$

die zweite . . . . . mit $\frac{(n-1)^{[p-1]}}{1^{[p]}}$

die dritte . . . . . mit $\frac{(n-2)^{[p-1]}}{1^{[p]}}$

. . . . . .

die n te . . . . . mit $\frac{1^{[p-1]}}{1^{[p]}}$

Die Summe dieser Brüche ist $= \frac{n^{[p]}}{1^{[p]}}$, welcher Faktor nun von beiden Seiten entfernt werden kann, so dass bleibt

$$\begin{aligned} A\left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{[p]} &= A\left(f(m-1)(1,2,3,..)\right)^{[p-1]} \cdot A_1 \\ &+ A\left(f(m-2)(1,2,3,..)\right)^{[p-1]} \cdot A_2 \\ &+ A\left(f(m-3)(1,2,3,..)\right)^{[p-1]} \cdot A_3 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ A\left(f(p-1)(1,2,3,..)\right)^{[p-1]} \cdot A_{m-p+1} \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung 21, welche wir also hier wieder, aber auf anderem Wege, erhalten.

§. 13.

In der Gleichung 103 ist in den Verbindungsklassen, welche mit $A^{(1)}$ vervielfacht sind, dieses Element noch enthalten. Wollen wir nun die vollständigen gedoppelten Verbindungen durch solche darstellen, welchen dies Element fehlt, so werden wir dasselbe nach und nach aus allen Klassen wegbringen müssen, welche es noch enthalten. Die Gleichung 103 selbst gibt uns den Weg an, auf welchem wir unser Ziel erreichen können. Wenden wir das Gesetz dieser Gleichung auf ihre einzelnen Glieder an, so erhalten wir zuerst

Digitized by Google

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-x)\right).A_x^{(s)} = A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-1)}f(m-x)\right).A_x^{(o)}$$
$$+ A\left([1,2,..n]^{(p-1)}f(m-x-1)\right).A_1^{(o)}.A_x^{(o)}$$
$$+ A\left([1,2,..n]^{(p-1)}f(m-x-2)\right).A_2^{(o)}.A_x^{(o)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left([1,2,..n]^{(p-1)}f(p-2)\right).A_{m-p-x+1}^{(s)}.A_x^{(o)}$$

Setzen wir hierin $x = 1,2,3,\ldots m-p+1$, und verbinden diese Gleichungen mit 103, so wird

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) = A\left([s]^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$+A\left([s]^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+A\left([s]^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$

Der Weg zur Erweiterung dieser Gleichung ist hier vorgezeichnet. Wir bringen auf gleiche Weise aus dem dritten Gliede das Element $A^{(o)}$ fort und erhalten

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) = A\left([s]^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$+A\left([s]^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+A\left([s]^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$+A\left([s]^{(3)}f(3|m-p+3)\right).A\left([1,2,3,..n]^{(p-3)}f(m-3|p-3)\right)$$

Geht man so weiter, so gelangt man zuletzt zur Gleichung

112) $$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$+ A\left([s]^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-1,s+1..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$+ A\left([s]^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s]^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left([s]^{(p)}f(p|m)\right).A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

Werden die unteren Stellenzahlen gleich, so erhalten wir hieraus die Gleichung 406 der Analysis.

Digitized by Google

$$113)\quad A\,[1,2,3,..n]^{(p)} = A\,[1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p)}\,.\,(A^{(1)})^{0} + A\,[1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-1)}\,.\,(A^{(2)})^{1} + A\,[1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-2)}\,.\,(A^{(3)})^{2} + \ldots + A\,[1,2,..s-1,s+1,..n]^{(0)}\,.\,(A^{(p)})^{p}$$

So wie im §. 2 wollen wir auch hier in 112 aus den anfänglichen Verbindungen noch das Element $A^{(s+1)}$ heben und den neuen Verbindungs-Klassen zugesellen; dies geschieht wieder mit Hülfe von 103. Der Weg ist durch das Vorige angegeben. Man erhält

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left([s,s+1]^{(0)}\,f(0|m-p)\right)\,.\,A\left([1,2,..s-1,s+2,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1]^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right).\,A\left([1,2,..s-1,s+2,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1]^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right).\,A\left([1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \ldots$$
$$+ A\left([s,s+1]^{(p)}\,f(p|m)\right)\,.\,A\left([1,2,..s-1,s+2,..n)^{(0)}\,f(m-p|0)\right)$$

Und ganz allgemein, wenn h Elemente getrennt werden.

$$114)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(0)}\,f(0|m-p)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \ldots$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(p)}\,f(p|m)\right)\,.A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(0)}\,f(m-p|0)\right)$$

Setzt man hierin $s = s-h+1$, so wird

$$115)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(0)}\,f(0|m-p)\right).A\left([1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$+ A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \ldots$$
$$+ A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(p)}\,f(p|m)\right)\,.A\left([1,2,..s-h,s+1,..n]^{(0)}\,f(m-p|0)\right)$$

Digitized by Google

Wird in 114 $s = 1$, so entsteht

116) $$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left([1,2,3,..h]^{(o)}\,f(o\,|\,m-p)\right) \cdot A\left([h+1,h+2,..n]^{(p)}\,f(m\,|\,p)\right)$$
$$+ A\left([1,2,3,..h]^{(1)}\,f(1\,|\,m-p+1)\right) \cdot A\left([h+1,h+2,..n]^{(p-1)}\,f(m-1\,|\,p-1)\right)$$
$$+ A\left([1,2,3,..h]^{(2)}\,f(2\,|\,m-p+2)\right) \cdot A\left([h+1,h+2,..n]^{(p-2)}\,f(m-2\,|\,p-2)\right)$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left([1,2,3,..h]^{(p)}\,f(p\,|\,m)\right) \cdot A\left([h+1,h+2,..n]^{(o)}\,f(m-p\,|\,o)\right)$$

oder in 115 $s = n$

117) $$= A\left([n-h+1,n-h+2,..n]^{(o)}\,f(o\,|\,m-p)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n-h]^{(p)}\,f(m\,|\,p)\right)$$
$$+ A\left([n-h+1,n-h+2,..n]^{(1)}\,f(1\,|\,m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n-h]^{(p-1)}\,f(m-1\,|\,p-1)\right)$$
$$+ A\left([n-h+1,n-h+2,..n]^{(2)}\,f(2\,|\,m-p+2)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n-h]^{(p-2)}\,f(m-2\,|\,p-2)\right)$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left([n-h+1,n-h+2,..n]^{(p)}\,f(p\,|\,m)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n-h]^{(o)}\,f(m-p\,|\,o)\right)$$

Wir gehen zu specielleren Fällen über und setzen die unteren Stellenzahlen gleich und erhalten

Aus 114

118) $$A[1,2,3,..n]^{(p)} = A[s,s+1,..s+h-1]^{(o)} \cdot A[1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}$$
$$+ A[s,s+1,..s+h-1]^{(1)} \cdot A[1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p-1)}$$
$$+ A[s,s+1,..s+h-1]^{(2)} \cdot A[1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p-2)}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A[s,s+1,..s+h-1]^{(p)} \cdot A[1,2,..s-1,s+h,..n]^{(o)}$$

Aus 115

119) $$= A\,[s-h+1,s-h+2,..s]^{(o)} \cdot A\,[1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p)}$$
$$+ A\,[s-h+1,s-h+2,..s]^{(1)} \cdot A\,[1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p-1)}$$
$$+ A\,[s-h+1,s-h+2,..s]^{(2)} \cdot A\,[1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p-2)}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\,[s-h+1,s-h+3,..s]^{(p)} \cdot A\,[1,2,..s-h,s+1,..n]^{(o)}$$

Digitized by Google

Aus 116

120) $$= A\,[1,2,3,..h]^{(o)} \cdot A\,[h+1,h+2,..n]^{(p)}$$
$$+ A\,[1,2,3,..h]^{(1)} \cdot A\,[h+1,h+2,..n]^{(p-1)}$$
$$+ A\,[1,2,3,..h]^{(2)} \cdot A\,[h+1,h+2,..n]^{(p-2)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\,[1,2,3,..h]^{(p)} \cdot A\,[h+1,h+2,..n]^{(o)}$$

Aus 117

121) $$= A\,[n-h+1,n-h+2,..n]^{(o)} \cdot A\,[1,2,3,..n-h]^{(p)}$$
$$+ A\,[n-h+1,n-h+2,..n]^{(1)} \cdot A\,[1,2,3,..n-h]^{(p-1)}$$
$$+ A\,[n-h+1,n-h+2,..n]^{(2)} \cdot A\,[1,2,3,..n-h]^{(p-2)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\,[n-h+1,n-h+2,..n]^{(p)} \cdot A\,[1,2,3,..n-h]^{(o)}$$

Unsere Gleichung 120 fällt mit der 407 der Analysis zusammen.

§. 14.

In den Verbindungsklassen des vorhergehenden §. sind immer dieselben Elemente und in gleicher Anzahl enthalten. Wir wollen nun, wie im §. 3, einen Wechsel der Elemente eintreten lassen. Hierbei gehen wir von der Gleichung 114 aus und ersetzen nach 104 alle Glieder, vom zweiten an, welche $A^{(o+h-1)}$ nicht enthalten, durch andere, worin dieses Element steht; diese Substitution führt zu

Digitized by Google

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) = A\left([s,s+1,..s+h]^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(2)}f(2)\right) \Big| A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-2)}f(m-2)\right)$$
$$- A_{\cdot}^{(s+h-1)}.A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(1)\right) \Big|$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(3)}f(3)\right) \Big| A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-3)}f(m-3)\right)$$
$$- A_{\cdot}^{(s+h-1)}.A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(2)}f(2)\right) \Big|$$
$$- A_{\cdot}^{(s+h-1)}.A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(1)\right) \Big|$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(3)}f(3)\right) \Big| A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-3)}f(m-3)\right)$$
$$- A_{\cdot}^{(s+h-1)}.A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(2)}f(2)\right) \Big|$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(3)}f(4)\right) \Big| A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-3)}f(m-4)\right)$$
$$- A_{\cdot}^{(s+h-1)}.A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(2)}f(3)\right) \Big|$$
$$- A_{\cdot}^{(s+h-1)}.A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(2)\right) \Big|$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Die Vorzahlen lassen sich nach 104 wieder vereinigen und man erhält

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-\bar{2}]^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-\bar{1},..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-2]^{(p)}f(p|m)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

Auf gleiche Weise ersetzen wir in dieser Gleichung vom dritten Gliede an alle Verbindungsklassen, welche das Element $A^{(s+h-1)}$ nicht enthalten, durch andere, worin es vorkömmt. Der Weg ist vorgezeichnet, wir erhalten

Digitized by Google

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\int(m)\right) =$$
$$= A\left([s,s+1,..s+h]^{(o)}\int(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}\int(m|p)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}\int(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-1)}\int(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-2]^{(2)}\int(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-2,..n]^{(p-2)}\int(m-2|p-2)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-3]^{(3)}\int(3|m-p+3)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-2,..n]^{(p-3)}\int(m-3|p-3)\right)$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-3]^{(p)}\int(p|m)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-2,..n]^{(o)}\int(m-p|o)\right)$$

Gehen wir auf diese Art weiter, so erhalten wir zuletzt

122) $$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\int(m)\right) =$$
$$= A\left([s,s+1,..s+h]^{(o)}\int(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}\int(m|p)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}\int(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-1)}\int(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-2]^{(2)}\int(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-2,..n]^{(p-2)}\int(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-p]^{(p)}\int(p|m)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-p,..n]^{(o)}\int(m-p|o)\right)$$

Wird $s = s-h+1$ gesetzt, so entsteht

123) $$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\int(m)\right) =$$
$$= A\left([s-h+1,s-h+2,..s+1]^{(o)}\int(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p)}\int(m|p)\right)$$
$$+ A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(1)}\int(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-h,s,..n]^{(p-1)}\int(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s-h+1,s-h+2,..s-1]^{(2)}\int(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-h,s-1,..n]^{(p-2)}\int(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ A\left([s-h+1,s-h+2,..s-p+1]^{(p)}\int(p|m)\right).A\left([1,2,..s-h,s-p+1,..n]^{(o)}\int(m-p|o)\right)$$

Ausser diesen beiden Gleichungen finden auch noch die folgenden statt:

Digitized by Google

124) $A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left([s-h, s-h+1,..s]^{(o)}\ f(o|m-p)\right) . A\left([1,2,..s-h, s+1,..n]^{(p)}\ f(m|p)\right)$

$+ A\left([s-h+1, s-h+2,..s]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left([1,2,..s-h+1, s+1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left([s-h+2, s-h+3,..s]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) . A\left([1,2,..s-h+2, s+1,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$+ . . . . . .$

$+ A\left([s-h+p, s-h+p+1,..s]^{(p)}f(p|m)\right) . A\left([1,2,..s-h+p, s+1,..n]^{(o)}\ f(m-p|o)\right)$

und

125) $A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left([s-1, s,..s+h-1]^{(o)}\ f(o|m-p)\right) . A\left([1,2,..s-1, s+h,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$

$+ A\left([s, s+1,..s+h-1]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left([1,2,..s, s+h,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left([s+1, s+2,..s+h-1]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) . A\left([1,2,..s+1, s+h,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$+ . . . . . .$

$+ A\left([s+p-1, s+p,..s+h-1]^{(p)}f(p|m)\right) . A\left([1,2,..s+p-1, s+h,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$

Wir gehen zu speciellen Fällen über und setzen in 122 $s=1$, so wird

126) $A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left([1,2,..h+1]^{(o)}f(o|m-p)\right) . A\left([h+1, h+2,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$

$+ A\left([1,2,..h]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left([h, h+1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left([1,2,..h-1]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) . A\left([h-1, h,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$+ . . . . . .$

$+ A\left([1,2,..h-p+1]^{(p)}f(p|m)\right) . A\left([h-p+1, h-p+2,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$

In 124 setzen wir $s=n$, und erhalten

127) $A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left([n-h, n-h+1,..n]^{(o)}\ f(o|m-p)\right) . A\left([1,2,..n-h]^{(p)}\ f(m|p)\right)$

$+ A\left([n-h+1, n-h+2,..n]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left([1,2,..n-h+1]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left([n-h+2, n-h+3,..n]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) . A\left([1,2,..n-h+2]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$+ . . . . . .$

$+ A\left([n-h+p, n-h+p+1,..n]^{(p)}f(p|m)\right) . A\left([1,2,..n-h+p]^{(o)}\ f(m-p|o)\right)$

Digitized by Google

Wir setzen nun die oberen Stellenzahlen gleich und erhalten aus den vorstehenden, folgende Gleichungen:

Aus 122

$$128)\quad A[1,2,3,..n]^{(p)} = A[s,s+1,..s+h]^{(o)} \cdot A[1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)} + A[s,s+1,..s+h-1]^{(1)} \cdot A[1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p-1)} + A[s,s+1,..s+h-2]^{(2)} \cdot A[1,2,..s-1,s+h-2,..n]^{(p-2)} + \ldots + A[s,s+1,..s+h-p]^{(p)} \cdot A[1,2,..s-1,s+h-p,..n]^{(o)}$$

Aus 124

$$129)\quad = A[s-h,s-h+1,..s]^{(o)} \cdot A[1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p)} + A[s-h+1,s-h+2,..s]^{(1)} \cdot A[1,2,..s-h+1,s+1,..n]^{(p-1)} + A[s-h+2,s-h+3,..s]^{(2)} \cdot A[1,2,..s-h+2,s+1,..n]^{(p-2)} + \ldots + A[s-h+p,s-h+p+1,..s]^{(p)} \cdot A[1,2,..s-h+p,s+1,..n]^{(o)}$$

Aus 126

$$130)\quad = A[1,2,..h+1]^{(o)} \cdot A[h+1,h+2,..n]^{(p)} + A[1,2,....h]^{(1)} \cdot A[h,h+1,....n]^{(p-1)} + A[1,2,..h-1]^{(2)} \cdot A[h-1,h,....n]^{(p-2)} + \ldots + A[1,2,..h-p+1]^{(p)} \cdot A[h-p+1,h-p+2,..n]^{(o)}$$

Aus 127

$$131)\quad = A[n-h,n-h+1,..n]^{(o)} \cdot A[1,2,..n-h]^{(p)} + A[n-h+1,n-h+2,..n]^{(1)} \cdot A[1,2,..n-h+1]^{(p-1)} + A[n-h+2,n-h+3,..n]^{(2)} \cdot A[1,2,..n-h+2]^{(p-2)} + \ldots + A[n-h+p,n-h+p+1,..n]^{(p)} \cdot A[1,2,..n-h+p]^{(o)}$$

Digitized by Google

§. 15.

Wir legen uns nun eine Aufgabe vor, welche die umgekehrte des §. 13 ist, und fragen: Wie können

$$A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}f(m)\right) \text{ oder } A\left([1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p)}f(m)\right)$$

durch Verbindungen dargestellt werden, denen kein Element fehlt. Wir benutzen die Gleichung 104

$$A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right) - A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right) \cdot A^{(s)}_{1|m-p+1}$$

bilden nach ihr folgende

$$A\left([1,2,..s-1,s+2,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p)}f(m)\right) - A\left([1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right) \cdot A^{(s+1)}_{1|m-p+1}$$

und ersetzen die Glieder zur Rechten nach dem Gesetze der vorhergehenden Gleichung, hierdurch entsteht

$$A\left([1,2,..s-1,s+2,..n]^{(p)}f(m)\right) = A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right)$$
$$- A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right) \cdot A^{(s)}_{1|m-p+1}$$
$$- A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-1)\right) \cdot A^{(s+1)}_{1} + A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right) \cdot A^{(s)}_{1|m-p+1} \cdot A^{(s+1)}_{1}$$
$$- A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-2)\right) \cdot A^{(s+1)}_{2} + A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-3|p-2)\right) \cdot A^{(s)}_{1|m-p} \cdot A^{(s+1)}_{2}$$
$$- A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-3)\right) \cdot A^{(s+1)}_{3} + A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-4|p-2)\right) \cdot A^{(s)}_{1|m-p-1} \cdot A^{(s+1)}_{3}$$
$$- \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$- A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}f(p-1)\right) \cdot A^{(s+1)}_{m-p+1} + A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}f(p-2|p-2)\right) \cdot A^{(s)}_{1|} \cdot A^{(s+1)}_{m-p+1}$$

Digitized by Google

$$= A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) - A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1)\right).A\left((s,s+1)^{(1)}\,f(1)\right)$$
$$- A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-2)\right).A\left((s,s+1)^{(1)}\,f(2)\right)$$
$$- A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-3)\right).A\left((s,s+1)^{(1)}\,f(3)\right)$$
$$- . . . . . .$$
$$- A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(p-1)\right).A\left((s,s+1)^{(1)}\,f(m-p+1)\right)$$
$$+ A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(m-2)\right).A\left((s,s+1)^{(2)}\,f(2)\right)$$
$$+ A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(m-3)\right).A\left((s,s+1)^{(2)}\,f(3)\right)$$
$$+ A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(m-4)\right).A\left((s,s+1)^{(2)}\,f(4)\right)$$
$$+ . . . . . .$$
$$+ A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(p-2)\right).A\left((s,s+1)^{(2)}\,f(m-p+2)\right)$$

$$= A\left((s,s+1)^{(0)}\,f(0|m-p)\right) \;.\; A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s,s+1)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right) \;.\; A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1)^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right) \;.\; A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(m-2|p-2)\right)$$

Der hier angegebene Weg führt auf gleiche Art weiter, wir können die gedoppelten Verbindungen mit Wiederholung, worin h Elemente fehlen, darstellen durch dieselben Verbindungen, die alle Elemente enthalten, und durch die gedoppelten Verbindungen ohne Wiederholung aus den ausgeschlossenen Elementen. Die allgemeine Gleichung ist

132) $$A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(0)}\,f(0|m-p)\right) \;.\; A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right) \;.\; A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right) \;.\; A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(m-2|p-2)\right)$$
$$- . . . . . .$$
$$(-)^p.A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(p)}\,f(p|m)\right) \;.\; A\left([1,2,3,..n]^{(0)}\,f(m-p|0)\right)$$

Fehlen aber die Elemente $A^{(s)}$, $A^{(s-1)}$, $A^{(s-2)}$, .. $A^{(s-k+1)}$, so ist

Digitized by Google

133) $$A\left([1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(o)}\,f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(p)}\,f(p|m)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(o)}\,f(m-p|o)\right)$$

Setzen wir in 132 $s=1$, so wird

134) $$A\left([h+1,h+2,..n]^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left((1,2,3,..h)^{(o)}\,f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$- A\left((1,2,3,..h)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((1,2,3,..h)^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\left((1,2,3,..h)^{(p)}\,f(p|m)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(o)}\,f(m-p|o)\right)$$

Aus 133 erhalten wir für $s=n$

135) $$A\left([1,2,3,..n-h]^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(o)}\,f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$- A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\left((n-h+1,n-h+2,..n)^{(p)}\,f(p|m)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(o)}\,f(m-p|o)\right)$$

Wird $h=n$, so wird aus 134 oder 135

136) $$o = A\left((1,2,3,..n)^{(o)}\,f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$- A\left((1,2,3,..n)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((1,2,3,..n)^{(2)}\,f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\,f(p|m)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(o)}\,f(m-p|o)\right)$$

Digitized by Google

Setzen wir die unteren Stellenzahlen gleich, so erhalten wir aus 132 die Gleichung 408 der Analysis.

$$137)\quad A[1,2,3,..s-1,s+h,..n]^{(p)} = A(s,s+1,..s+h-1)^{(o)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p)} - A(s,s+1,..s+h-1)^{(1)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p-1)} + A(s,s+1,..s+h-1)^{(2)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p-2)} - \ldots\ldots\ldots\ldots (-)^{p} \cdot A(s,s+1,..s+h-1)^{(p)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(o)}$$

Aus 133 wird in diesem Falle

$$138)\quad A[1,2,3,..s-h,s+1,..n]^{(p)} = A(s-h+1,s-h+2,..s)^{(o)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p)} - A(s-h+1,s-h+2,..s)^{(1)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p-1)} + A(s-h+1,s-h+2,..s)^{(2)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p-2)} - \ldots\ldots\ldots\ldots (-)^{p} \cdot A(s-h+1,s-h+2,..s)^{(p)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(o)}$$

Aus 134 wird

$$139)\quad A[h+1,h+2,..n]^{(p)} = A(1,2,3,..h)^{(o)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p)} - A(1,2,3,..h)^{(1)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p-1)} + A(1,2,3,..h)^{(2)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p-2)} - \ldots\ldots\ldots\ldots (-)^{p} \cdot A(1,2,3,..h)^{(p)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(o)}$$

Aus 135 entsteht

$$140)\quad A[1,2,3,..n-h]^{(p)} = A(n-h+1,n-h+2,..n)^{(o)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p)} - A(n-h+1,n-h+2,..n)^{(1)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p-1)} + A(n-h+1,n-h+2,..n)^{(2)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p-2)} - \ldots\ldots\ldots\ldots (-)^{p} \cdot A(n-h+1,n-h+2,..n)^{(p)} \cdot A[1,2,3,..n]^{(o)}$$

Zuletzt erhält man aus 136 die Gleichung 412 der Analysis.

Digitized by Google

141)
$$\begin{aligned} 0 = {} & A\,(1,2,3,..n)^{(0)} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(p)} \\ & - A\,(1,2,3,..n)^{(1)} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(p-1)} \\ & + A\,(1,2,3,..n)^{(2)} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(p-2)} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (-)^{p} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p)} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(0)} \end{aligned}$$

Diese Gleichung, welche die umgekehrte von 54 ist, gibt uns wieder die Mittel zur Hand, die geordneten Verbindungen mit Wiederholung durch die geordneten Verbindungen ohne Wiederholung darzustellen. Es ist

142)
$$\begin{aligned} (-)^{p-1} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(p)} = {} & + A\,(1,2,3,..n)^{(\ )} \left(f(p)\,(1,2,3,..)\right)^{(1)} \\ & - A\,(1,2,3,..n)^{(\ )} \left(f(p)\,(1,2,3,..)\right)^{(2)} \\ & + A\,(1,2,3,..n)^{(\ )} \left(f(p)\,(1,2,3,..)\right)^{(3)} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (-)^{p-1} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(\ )} \left(f(p)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)} \end{aligned}$$

Wo die Stellenzahlen, aus welchen die Summen gebildet werden, über $A\,(1,2,3,..)^{(\ )}$ in die kleinen Klammern gesetzt werden müssen.

§. 16.

Die Untersuchungen der §§. 3 und 14 haben uns gezeigt, dass, wenn Verbindungen durch Produkte aus anderen Verbindungen dargestellt werden, welche immer dieselben Elemente enthalten, man auch einen Wechsel der Elemente kann eintreten lassen. Dies veranlasst uns jetzt zu der Frage: Kann in der Gleichung 132 oder den folgenden eine ähnliche Umformung vorgenommen werden; kann auch hier die Zahl der Elemente in den einzelnen Verbindungen zu- oder abnehmen?

Digitized by Google

Wir bilden nach 132 zuerst die Gleichung

$$A\left([1,2,..s-q-1,s+h,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(o)}f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,..s-q-1,s,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,..s-q-1,s,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,2,..s-q-1,s,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(p)}f(p|m)\right) \cdot A\left([1,2,..s-q-1,s,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

Die gedoppelten Verbindungen mit Wiederholung dieser Gleichung ersetzen wir nun von der zweiten Horizontalreihe an durch andere, welche ein Element $A^{(q-1)}$ mehr enthalten, nach der Vorschrift 104.

Hierdurch wird

$$A\left([1,2,..s-q-1,s+h,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left((s+1,s+2,..s+h-1)^{(o)}f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,..s-q-1,s,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,..s-q-1,s-1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(2)}f(2)\right) \Big| A\left([1,2,..s-q-1,s-1,..n]^{(p-2)}f(m-2)\right)$$
$$+ A_1^{(q-1)} \cdot A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}f(1)\right) \Big|$$
$$+ A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(3)}f(3)\right) \Big| A\left([1,2,..s-q-1,s-1,..n]^{(p-3)}f(m-3)\right)$$
$$+ A_1^{(q-1)} \cdot A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(2)}f(2)\right) \Big|$$
$$+ A_2^{(q-1)} \cdot A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}f(1)\right) \Big|$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(3)}f(3)\right) \Big| A\left([1,2,..s-q-1,s-1,..n]^{(p-3)}f(m-3)\right)$$
$$- A_1^{(q-1)} \cdot A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(2)}f(2)\right) \Big|$$
$$- A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(4)}f(4)\right) \Big| A\left([1,2,..s-q-1,s-1,..n]^{(p-4)}f(m-4)\right)$$
$$- A_1^{(q-1)} \cdot A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(3)}f(3)\right) \Big|$$
$$- A_2^{(q-1)} \cdot A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(2)}f(2)\right) \Big|$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

Die Vorzahlen können nach 11 zusammengezogen werden und es entsteht

$$A\left([1,2,..s-q-1,s+h,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left((s+1,s+2,..s+h-1)^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-q-1,s,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-q-1,s-1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s-1,s,..s+h-1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-q-1,s-1,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p.A\left((s-1,s,..s+h-1)^{(p)}f(p|m)\right).A\left([1,2,..s-q-1,s-1,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

Dasselbe Geschäft nehmen wir mit dem Elemente $A^{(s-1)}$ vor u. s. w. Am Ende gelangt man zur allgemeinen Gleichung.

143) $$A\left([1,2,..s-q-1,s+h,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left((s+1,s+2,..s+h-1)^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-q-1,s,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-q-1,s-1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s-1,s,..s+h-1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-q-1,s-2,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p.A\left((s-p+1,s-p+2,..s+h-1)^{(p)}f(p|m)\right).A\left([1,2,..s-q-1,s-p,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

Lässt man aber in 132 statt der Elemente $s-q, s-q+1,..s-1$ die Elemente $s, s+1,..s+h-1$ selbst fehlen, so führt dies zur Gleichung

144) $$A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}f(m)\right) = A\left([1,2,..s-1,s+h-1,..n]^{(p)}f(m)\right)$$
$$- A\left((s+h-1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-2,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s+h-2,s+h-1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-1,s+h-3,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{h-1}.A\left((s+1,s+2,..s+h-1)^{(h-1)}f(h-1|m-p+h-1)\right).A\left([1,2,..n]^{(p-h+1)}f(m-h+1|p-h+1)\right)$$
$$(-)^h.A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(h)}f(h|m-p+h)\right).A\left([1,2,3,..n]^{(p-h)}f(m-h|p-h)\right)$$

Setzt man aber $s = s-h+1$, so wird aus 143

Digitized by Google

145) $$A\left([1,2,..s-h-q,s+1,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left((s-h+2,s-h+3,..s)^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s-h-q,s-h+1,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-h-q,s-h,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s-h,s-h+1,..s)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-h-q,s-h-1,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p.A\left((s-h-p+2,s-h-p+3,..s)^{(p)}f(p|m)\right).A\left([1,2,..s-h-q,s-h-p+1,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

Aus 144 erhält man in diesem Falle

146) $$A\left([1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p)}f(m)\right) = A\left([1,2,..s-h,s,..n]^{(p)}f(m)\right)$$
$$- A\left((s)^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s-h,s-1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s-1,s)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s-h,s-2,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{h-1}.A\left((s-h+2,s-h+3,..s)^{(h-1)}f(h-1|m-p+h-1)\right).A\left([1,2,3,..n]^{(p-h+1)}f(m-h+1|p-h+1)\right)$$
$$(-)^h.A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(h)}f(h|m-p+h)\right).A\left([1,2,3,..n]^{(p-h)}f(m-h|p-h)\right)$$

Ausser diesen Gleichungen findet man auf gleiche Art noch die folgenden:

147) $$A\left([1,2,..s-1,s+h+q,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left((s,s+1,..s+h-2)^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s+h-1,s+h+q,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s+h,s+h+q,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1,..s+h)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s+h+1,s+h+q,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p.A\left((s,s+1,..s+h+p-2)^{(p)}f(p|m)\right).A\left([1,2,..s+h+p-1,s+h+q,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

und

148) $$A\left([1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}f(m)\right) = A\left([1,2,..s,s+h,..n]^{(p)}f(m)\right)$$
$$- A\left((s)^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s+1,s+h,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s,s+1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s+2,s+h,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{h-1}.A\left((s,s+1,..s+h-2)^{(h-1)}f(h-1|m-p+h-1)\right).A\left([1,2,3,..n]^{(p-h+1)}f(m-h+1|p-h+1)\right)$$
$$(-)^h.A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(h)}f(h|m-p+h)\right).A\left([1,2,3,..n]^{(p-h)}f(m-h|p-h)\right)$$

Digitized by Google

Setzt man in diesen beiden Gleichungen wieder $s = s-h+1$, so entsteht

149) $$A\left([1,2,..s-h,s+q+1,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left((s-h+1,s-h+2,..s-1)^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([1,2,..s,s+q+1,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([1,2,..s+1,s+q+1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s-h+1,s-h+2,..s+1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,..s+2,s+q+1,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p.A\left((s-h+1,s-h+2,..s+p-1)^{(p)}f(p|m)\right).A\left([1,2,..s+p,s+q+1,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

und

150) $$A\left([1,2,..s-h,s+1,..n]^{(p)}f(m)\right) = A\left([1,2,..s-h+1,s+1,..n]^{(p)}f(m)\right)$$
$$- A\left((s-h+1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left([1,2,..s-h+2,s+1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s-h+1,s-h+2)^{(2)}f(2|m-p+2)\right) . A\left([1,2,..s-h+3,s+1,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{h-1}.A\left((s-h+1,s-h+2,..s-1)^{(h-1)}f(h-1|m-p+h-1)\right).A\left([1,2,3,..n]^{(p-h+1)}f(m-h+1|p-h+1)\right)$$
$$(-)^h . A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(h)}f(h|m-p+h)\right) . A\left([1,2,3,..n]^{(p-h)}f(m-h|p-h)\right)$$

Wir wollen jetzt aus dem Vorhergehenden nur einige wenige specielle Fälle ziehen. Es sey in 143 $q = s-1$, so ist

151) $$A\left([s+h,s+h+1,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left((s+1,s+2,..s+h-1)^{(o)}f(o|m-p)\right).A\left([s,s+1,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([s-1,s,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((s-1,s,..s+h-1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([s-2,s-1,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p.A\left((s-p+1,s-p+2,..s+h-1)^{(p)}f(p|m)\right).A\left([s-p,s-p+1,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

In 145 sey $q = s-h$, so ist

Digitized by Google

152) $A\left([s+1,s+2,..n]^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left((s-h+2,s-h+3,..s)^{(o)}\ f\ (o|m-p)\right).A\left([s-h+1,s-h+2,..n]^{(p)}\ f\ (m|p)\right)$

$- A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(1)}\ f\ (1|m-p+1)\right).A\left([s-h,s-h+1,..n]^{(p-1)}f\ (m-1|p-1)\right)$

$+ A\left((s-h,s-h+1,..s)^{(2)}\ f\ (2|m-p+2)\right).A\left([s-h-1,s-h,..n]^{(p-2)}f\ (m-2|p-2)\right)$

$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-)^p.A\left((s-h-p+2,s-h-p+3,..s)^{(p)}f(p|m)\right).A\left([s-h-p+1,s-h-p+2,..n]^{(o)}f(m-p|o)\right)$

In 147 und 149 setzen wir $q=n$ und erhalten

153) $A\left([1,2,3,..s-1]^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left((s,s+1,..s+h-2)^{(o)}\ f\ (o|m-p)\right)\ .\ A\left([1,2,3,..s+h-1]^{(p)}f\ (m|p)\right)$

$- A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(1)}f\ (1|m-p+1)\right)\ .\ A\left([1,2,3,..s+h]^{(p-1)}\ f\ (m-1|p-1)\right)$

$+ A\left((s,s+1,..s+h)^{(2)}f\ (2|m-p+2)\right)\ .\ A\left([1,2,3,..s+h+1]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-)^p.A\left((s,s+1,..s+h+p-2)^{(p)}\ f\ (p|m)\right)\ .\ A\left([1,2,3,..s+h+p-1]^{(o)}f(m-p|o)\right)$

und

154) $A\left([1,2,3,..s-h]^{(p)}f\ (m)\right) =$

$= A\left((s-h+1,s-h+2,..s-1)^{(o)}\ f\ (o|m-p)\right).A\left([1,2,3,..s]^{(p)}\ f\ (m|p)\right)$

$- A\left((s-h+1,s-h+2,..s)^{(1)}\ f\ (1|m-p+1)\right).A\left([1,2,3,..s+1]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left((s-h+1,s-h+2,..s+1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,3,..s+2]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-)^p.A\left((s-h+1,s-h+2,..s+p-1)^{(p)}f(p|m)\right).A\left([1,2,3,..s+p]^{(o)}\ f\ (m-p|o)\right)$

Setzt man ferner in 153 $s=1$ oder in 154 $s=h$, so wird

155) $o = A\left((1,2,3,..h-1)^{(o)}f\ (o|m-p)\right)\ .A\left([1,2,3,..h]^{(p)}f\ (m|p)\right)$

$- A\left((1,2,3,..h)^{(1)}\ f\ (1|m-p+1)\right).A\left([1,2,3,..h+1]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left((1,2,3,..h+1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([1,2,3,..h+2]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-)^p.A\left((1,2,3,..h+p-1)^{(p)}\ f\ (p|m)\right).A\left([1,2,3,..h+p]^{(o)}\ f\ (m-p|o)\right)$

Digitized by Google

Nimmt man an, es sey in 144 und 148 $s=1$, so entsteht

156) $$A\left([h+1,h+2,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) = A\left([h,h+1,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right)$$
$$- A\left((h)^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([h-1,h,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((h-1,h)^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([h-2,h-1,..n]^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{h-1} \cdot A\left((2,3,..h)^{(h-1)}\,f\,(h-1|m-p+h-1)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-h+1)}\,f\,(m-h+1|p-h+1)\right)$$
$$(-)^{h} \cdot A\left((1,2,3,..h)^{(h)}\,f\,(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-h)}\,f\,(m-h|p-h)\right)$$

und

157) $$= A\left([1,h+1,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right)$$
$$- A\left((1)^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,h+1,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((1,2)^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,2,3,h+1,..n]^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{h-1} \cdot A\left((1,2,..h-1)^{(h-1)}\,f\,(h-1|m-p+h-1)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-h+1)}\,f\,(m-h+1|p-h+1)\right)$$
$$(-)^{h} \cdot A\left((1,2,..h)^{(h)}\,f\,(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p-h)}\,f\,(m-h|p-h)\right)$$

Setzen wir in den beiden letzten Gleichungen $h=n$, so wird

158) $$0 = A\left([n]^{(p)}\,f\,(m)\right)$$
$$- A\left((n)^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([n-1,n]^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((n-1,n)^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([n-2,n-1,n]^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{p} \cdot A\left((n-p+1,n-p+2,..n)^{(p)}\,f\,(p|m)\right) \cdot A\left([n-p,n-p+1,..n]^{(0)}\,f\,(m-p|0)\right)$$

$$= A\left([1]^{(p)}\,f\,(m)\right)$$
$$- A\left((1)^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2]^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((1,2)^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,2,3]^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{p} \cdot A\left((1,2,3,..p)^{(p)}\,f\,(p|m)\right) \cdot A\left([1,2,3,..p+1]^{(0)}\,f\,(m-p|0)\right)$$

Digitized by Google

Die Gleichungen 144, 146, 148, 150 sind selbst schon specielle Fälle von unseren allgemeinen Gesetzen 143, 145, 147, 149; noch speciellere sind alle Gesetze von 151 bis 158. Um nun die bis jetzt bekannten Fälle zu erhalten, müssen wir noch weiter herabsteigen und die unteren Stellenzahlen gleich werden lassen.

Aus 144 erhalten wir in diesem Falle 414 der Analysis, aus 150, wenn wir $s = n$ setzen, 415 und aus 158 die Gleichung 416 desselben Werkes.

Ausserdem erhalten wir für die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen die folgenden Gesetze:

Aus 143

159) $$A\,[1,2,..s-q-1,s+h,..n]^{(p)} =$$
$$= A\,(s+1,s+2,..s+h-1)^{(o)} \cdot A\,[1,2,...s-q-1,\ s,...n]^{(p)}$$
$$- A\,(s,s+1,.....s+h-1)^{(1)} \cdot A\,[1,2,..s-q-1,s-1,..n]^{(p-1)}$$
$$+ A\,(s-1,s,.....s+h-1)^{(2)} \cdot A\,[1,2,..s-q-1,s-2,..n]^{(p-2)}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\,(s-p+1,s-p+2,..s+h-1)^{(p)} \cdot A\,[1,2,..s-q-1,s-p,..n]^{(o)}$$

Aus 145

160) $$A\,[1,2,..s-h-q,s+1,..n]^{(p)} =$$
$$= A\,(s-h+2,s-h+3,..s)^{(o)} \cdot A\,[1,2,..s-h-q,s-h+1,..n]^{(p)}$$
$$- A\,(s-h+1,s-h+2,..s)^{(1)} \cdot A\,[1,2,...s-h-q,\ s-h,...n]^{(p-1)}$$
$$+ A\,(s-h,\ s+h+1,...s)^{(2)} \cdot A\,[1,2,..s-h-q,s-h-1,..n]^{(p-2)}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\,(s-h-p+2,s-h-p+3,..s)^{(p)} \cdot A\,[1,2,..s-h-q,s-h-p+1,..n]^{(o)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aus 147

Digitized by Google

161) $A\,[1,2,..s-1,s+h+q,..n]^{(p)} =$

$= A\,(s,s+1,..s+h-2)^{(o)} \cdot A\,[1,2,..s+h-1,s+h+q,..n]^{(p)}$

$- A\,(s,s+1,..s+h-1)^{(1)} \cdot A\,[1,2,..s+h,\ s+h+q,..n]^{(p-1)}$

$+ A\,(s,s+1,...s+h)^{(2)} \cdot A\,[1,2,..s+h+1,s+h+q,..n]^{(p-2)}$

$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-)^p \cdot A\,(s,s+1,..s+h+p-2)^{(p)} \cdot A\,[1,2,..s+h+p-1,s+h+q,..n]^{(o)}$

Aus 149

162) $A\,[1,2,..s-h,s+q+1,..n]^{(p)} =$

$= A\,(s-h+1,s-h+2,..s-1)^{(o)} \cdot A\,[1,2,..s,\ s+q+1,..n]^{(p)}$

$- A\,(s-h+1,\ s-h+2,...s)^{(1)} \cdot A\,[1,2,..s+1,s+q+1,..n]^{(p-1)}$

$+ A\,(s-h+1,s-h+2,..s+1)^{(2)} \cdot A\,[1,2,..s+2,\ s+q+1,..n]^{(p-2)}$

$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-)^p \cdot A\,(s-h+1,s-h+2,..s+p-1)^{(p)} \cdot A\,[1,2,..s+p,s+q+1,..n]^{(o)}$

Aus 151

163) $A\,[s+h,s+h+1,..n]^{(p)} =$

$= A\,(s+1,s+2,..s+h-1)^{(o)} \cdot A\,[s,s+1,..n]^{(p)}$

$- A\,(s,\ s+1,...s+h-1)^{(1)} \cdot A\,[s-1,s,..n]^{(p-1)}$

$+ A\,(s-1,\ s,\ ...s+h-1)^{(2)} \cdot A\,[s-2,s-1,..n]^{(p-2)}$

$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-)^p \cdot A\,(s-p+1,s-p+2,..s+h-1)^{(p)} \cdot A\,[s-p,s-p+1,..n]^{(o)}$

Aus 153

164) $A\,[1,2,3,..s-1]^{(p)} =$

$= A\,(s,s+1,..s+h-2)^{(o)} \cdot A\,[1,2,3,..s+h-1]^{(p)}$

$- A\,(s,s+1,..s+h-1)^{(1)} \cdot A\,[1,2,3,...s+h]^{(p-1)}$

$+ A\,(s,\ s+1,...s+h)^{(2)} \cdot A\,[1,2,3,..s+h+1]^{(p-2)}$

$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-)^p \cdot A\,(s,s+1,..s+h+p-2)^{(p)} \cdot A\,[1,2,3,..s+h+p-1]^{(o)}$

Digitized by Google

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

Aus 155

165) $$\begin{aligned} 0 = {} & A\,(1,2,3,..h-1)^{(o)} \,.\, A\,[1,2,3,..h]^{(p)} \\ & - A\,(1,2,3,\ldots h)^{(1)} \,.\, A\,[1,2,3,..h+1]^{(p-1)} \\ & + A\,(1,2,3,..h+1)^{(2)} \,.\, A\,[1,2,3,..h+2]^{(p-2)} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (-)^p . A\,(1,2,3,..h+p-1)^{(p)} \,.\, A\,[1,2,3,..h+p]^{(o)} \end{aligned}$$

Aus 148

166) $$\begin{aligned} A\,[1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)} = {} & A\,[1,2,..s,s+h,..n]^{(p)} \\ & - A^{(s)} . A\,[1,2,..s+1,s+h,..n]^{(p-1)} \\ & + A^{(s)} . A^{(s+1)} . A\,[1,2,..s+2,s+h,..n]^{(p-2)} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (-)^{h-1} . A^{(s)} . A^{(s+1)} \ldots A^{(s+h-2)} . A\,[1,2,3,..n]^{(p-h+1)} \\ & (-)^{h} \,.\, A^{(s)} . A^{(s+1)} \ldots A^{(s+h-1)} . A\,[1,2,3,..n]^{(p-h)} \end{aligned}$$

u. s. w.

§. 17.

Die Gleichung 45 ist noch einer Umformung fähig, zu welcher uns die vorhergehenden Untersuchungen die Veranlassung geben. Wir ersetzen, vom zweiten Gliede an, alle Verbindungsklassen ohne Wiederholung, welche das Element $A^{(s+h-1)}$ enthalten, durch andere, denen es fehlt. Dies geschieht mit Hülfe der Gleichung 11; zuerst wird

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&A\left((1,2,..s-1,\ s+h,..n)^{(p)}\ f(m)\right) = \\
&\qquad = A\left([s,\ s+1,..s+h]^{(o)}\ f\ (o\,|\,m-p)\right)\ .\ A\left((1,2,3,..n)^{(p)}\ f\ (m\,|\,p)\right) \\
&-A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}\ f(1\,|\,m-p+1)\right).A\left((1,2,..s+h-2,s+h,..n)^{(p-1)}\ f(m-1|p-1)\right) \\
&+\qquad A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(2)\right)\ \Big|\ A\left((1,2,..s+h-2,s+h,..n)^{(p-2)}f(m-2)\right) \\
&-A_1^{(s+h-1)}.A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(1)\right)\ \Big| \\
&+\qquad A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(2)}f(3)\right)\ \Big|\ A\left((1,2,..s+h-2,s+h,..n)^{(p-2)}f(m-3)\right) \\
&-A_1^{(s+h-1)}.A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(2)\right) \\
&-A_2^{(s+h-1)}.A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(1)\right)\ \Big| \\
&+\ .\ .\ .

die anfänglichen Verbindungen nach 11 und fasst die Vorzahlen wieder nach 104 zusammen. Wird $A^{(s+h-s)}$ entfernt, so erhält man

$$A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left([s,s+1,..s+h]^{(o)}f(o|m-p)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left((1,2,..s+h-2,s+h,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-2]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((1,2,..s+h-3,s+h,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- A\left([s,s+1,..s+h-3]^{(3)}f(3|m-p+3)\right) \cdot A\left((1,2,..s+h-3,s+h,..n)^{(p-3)}f(m-3|p-3)\right)$$
$$+ \quad .$$
$$(-)^p \cdot A\left([s,s+1,..s+h-3]^{(p)}f(p|m)\right) \cdot A\left((1,2,..s+h-3,s+h,..n)^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

Ganz allgemein ist

167) $$A\left((1,2,..s-1,s+h,..n)^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left([s,s+1,..s+h]^{(o)}f(o|m-p)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left((1,2,..s+h-2,s+h,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s,s+1,..s+h-2]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((1,2,..s+h-3,s+h,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \quad .$$
$$(-)^p \cdot A\left([s,s+1,..s+h-p]^{(p)}f(p|m)\right) \cdot A\left((1,2,..s+h-p,s+h,..n)^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

Ganz auf dieselbe Weise kann man die folgende Gleichung finden.

168) $$A\left((1,2,..s-1,s+h,..n]^{(p)}f(m)\right) =$$
$$= A\left([s-1,s,..s+h-1]^{(o)}f(o|m-p)\right) \cdot A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$- A\left([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left((1,2,..s-1,s+1,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([s+1,s+2,..s+h-1]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left((1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$- \quad .$$
$$(-)^p \cdot A\left([s+p-1,s+p,..s+h-1]^{(p)}f(p|m)\right) \cdot A\left((1,2,..s-1,s+p,..n)^{(o)}f(m-p|o)\right)$$

Setzt man in beiden Gleichungen $s = s-h+1$, so wird aus 167

Digitized by Google

169) $A\left((1,2,..s-h,s+1,..n)^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left([s-h+1,s-h+2,..s+1]^{(o)}f(o|m-p)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m|p)\right)$

$- A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left((1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left([s-h+1,s-h+2,..s-1]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) . A\left((1,2,..s-2,s+1,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$- . . . . . .$

$(-)^p . A\left([s-h+1,s-h+2,..s-p+1]^{(p)}f(p|m)\right) . A\left((1,2,..s-p,s+1,..n)^{(o)}f(m-p|o)\right)$

Und aus 168

170) $A\left((1,2,..s-h,s+1,..n)^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left([s-h,s-h+1,..s]^{(o)}f(o|m-p)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m|p)\right)$

$- A\left([s-h+1,s-h+2,..s]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left((1,2,..s-h,s-h+2,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left([s-h+2,s-h+3,..s]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) . A\left((1,2,..s-h,s-h+3,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$- . . . . . .$

$(-)^p . A\left([s-h+p,s-h+p+1,..s]^{(p)}f(p|m)\right) . A\left((1,2,..s-h,s-h+p+1,..n)^{(o)}f(m-p|o)\right)$

Wir gehen zu speciellen Fällen über und setzen in 167 $s=1$, so wird

171) $A\left((h+1,h+2,..n)^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left([1,2,3,..h+1]^{(o)}f(o|m-p)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m|p)\right)$

$- A\left([1,2,3,..h]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left((1,2,..h-1,h+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left([1,2,3,..h-1]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) . A\left((1,2,..h-2,h+1,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$- . . . . . .$

$(-)^p . A\left([1,2,3,..h-p+1]^{(p)}f(p|m)\right) . A\left((1,2,..h-p,h+1,..n)^{(o)}f(m-p|o)\right)$

In 169 setzen wir $s=n$ und erhalten

172) $A\left((1,2,3,..n-h)^{(p)}f(m)\right) =$

$= A\left([n-h+1,n-h+2,..n+1]^{(o)}f(o|m-p)\right) . A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m|p)\right)$

$- A\left([n-h+1,n-h+2,..n]^{(1)}f(1|m-p+1)\right) . A\left((1,2,3,..n-1)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

$+ A\left([n-h+1,n-h+2,..n-1]^{(2)}f(2|m-p+2)\right) . A\left((1,2,3,..n-2)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$

$- . . . . . .$

$(-)^p . A\left([n-h+1,n-h+2,..n-p+1]^{(p)}f(p|m)\right) . A\left((1,2,3,..n-p)^{(o)}f(m-p|o)\right)$

Digitized by Google

Lassen wir nun auch die unteren Stellenzahlen gleich werden, so wird aus 167

173) $$A\,(1,2,3,..s-1,s+h,..n)^{(p)} =$$
$$= A\,[s,s+1,...s+h]^{(0)} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p)}$$
$$- A\,[s,s+1,..s+h-1]^{(1)} \cdot A\,(1,2,..s+h-2,s+h,..n)^{(p-1)}$$
$$+ A\,[s,s+1,..s+h-2]^{(2)} \cdot A\,(1,2,..s+h-3,s+h,..n)^{(p-2)}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\,[s,s+1,..s+h-p]^{(p)} \cdot A\,(1,2,..s+h-p-1,s+h,..n)^{(0)}$$

Aus 168

174)
$$= A\,[s-1,s,..s+h-1]^{(0)} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p)}$$
$$- A\,[s,s+1,..s+h-1]^{(1)} \cdot A\,(1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}$$
$$+ A\,[s+1,s+2,..s+h-1]^{(2)} \cdot A\,(1,2,..s-1,s+2,..n)^{(p-2)}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\,[s+p-1,s+p,..s+h-1]^{(p)} \cdot A\,(1,2,..s-1,s+p,..n)^{(0)}$$

Aus 169

175) $$A\,(1,2,..s-h,s+1,..n)^{(p)} =$$
$$= A\,[s-h+1,s-h+2,..s+1]^{(0)} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p)}$$
$$- A\,[s-h+1,s-h+2,.....s]^{(1)} \cdot A\,(1,2,..s-1,s+1,..n)^{(p-1)}$$
$$+ A\,[s-h+1,s-h+2,..s-1]^{(2)} \cdot A\,(1,2,..s-2,s+1,..n)^{(p-2)}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\,[s-h+1,s-h+2,..s-p+1]^{(p)} \cdot A\,(1,2,..s-p,s+1,..n)^{(0)}$$

Aus 170

176)
$$= A\,[s-h,s-h+1,..s]^{(0)} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p)}$$
$$- A\,[s-h+1,s-h+2,..s]^{(1)} \cdot A\,(1,2,..s-h,s-h+2,..n)^{(p-1)}$$
$$+ A\,[s-h+2,s-h+3,..s]^{(2)} \cdot A\,(1,2,..s-h,s-h+3,..n)^{(p-2)}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p \cdot A\,[s-h+p,s-h+p+1,..s]^{(p)} \cdot A\,(1,2,..s-h,s-h+p+1,..n)^{(0)}$$

Digitized by Google

Aus 171

$$177)\quad A\,(h+1,h+2,..n)^{(p)} = A\,[1,2,3,..h+1]^{(0)}\,.\,A\,(1,2,3,..n)^{(p)} - A\,[1,2,3,....h]^{(1)}\,.\,A\,(1,2,..h-1,h+1,..n)^{(p-1)} + A\,[1,2,3,..h-1]^{(2)}\,.\,A\,(1,2,..h-2,h+1,..n)^{(p-2)} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (-)^{p}\,.\,A\,[1,2,3,..h-p+1]^{(p)}\,.\,A\,(1,2,..h-p,h+1,..n)^{(0)}$$

Aus 172

$$178)\quad A\,(1,2,3,..n-h)^{(p)} = A\,[n-h+1,n-h+2,..n+1]^{(0)}\,.\,A\,(1,2,3,..n)^{(p)} - A\,[n-h+1,n-h+2,..n]^{(1)}\,.\,A\,(1,2,3,..n-1)^{(p-1)} + A\,[n-h+1,n-h+2,..n-1]^{(2)}\,.\,A\,(1,2,3,..n-2)^{(p-2)} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (-)^{p}\,.\,A\,[n-h+1,n-h+2,..n-p+1]^{(p)}\,.\,A\,(1,2,3,..n-p)^{(0)}$$

In diese Reihe von Gleichungen gehört 417 der Analysis.

§. 18.

Ein der Gleichung 56 entsprechendes Gesetz findet sich auch bei den gedoppelten Verbindungen mit Wiederholung. Wenn in jener Gleichung bei den Verbindungsklassen zur Rechten ein Element fehlte, so muss hier dasselbe wiederholt werden, und es ist

$$179)\quad (n+p)\,A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) = A\left([1,1,2,3,4,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) + A\left([1,2,2,3,4,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) + A\left([1,2,3,3,4,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) + \ldots\ldots\ldots + A\left([1,2,3,4,..n,n]^{(p)}\,f\,(m)\right)$$

Für den Fall der Gleichheit der unteren Stellenzahlen ist

Digitized by Google

$$180)\quad (n+p)\,A\,[1,2,3,..n]^{(p)} = A\,[1,1,2,3,4,..n]^{(p)} + A\,[1,2,2,3,4,..n]^{(p)} + A\,[1,2,3,3,4,..n]^{(p)} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + A\,[1,2,3,4,..n,n]^{(p)}$$

Wir bilden jetzt nach 104 die Gleichungen

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) = = A\left([1,1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) - A\left([1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(1)}_{1|m-p+1}$$

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) = = A\left([1,2,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) - A\left([1,2,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(1)}_{1|m-p+1}$$

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) = = A\left([1,2,3,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) - A\left([1,2,3,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(2)}_{1|m-p+1}$$

$$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) = = A\left([1,2,3,..n,n]^{(p)}\,f(m)\right) - A\left([1,2,3,..n,n]^{(p-1)}\,f(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(n)}_{1|m-p+1}$$

und zählen sie zusammen, so wird, wenn wir zugleich das vorhergehende Gesetz berücksichtigen,

$$181)\quad p.A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) = A\left([1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(1)}_{1|m-p+1} + A\left([1,2,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(1)}_{1|m-p+1} + A\left([1,2,3,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(2)}_{1|m-p+1} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + A\left([1,2,3,..n,n]^{(p-1)}\,f(m-1\,|\,p-1)\right)\cdot A^{(n)}_{1|m-p+1}$$

Verschwindet die Gleichheit der unteren Stellenzahlen, so wird, wenn man zuvor den gemeinschaftlichen Faktor trennt.

Digitized by Google

$$182)\quad p.A\,[1,2,3,..n]^{(p)} = A\,[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,.\,A^{(1)} + A\,[1,2,2,3,..n]^{(p-1)}\,.\,A^{(2)} + A\,[1,2,3,3,..n]^{(p-1)}\,.\,A^{(3)} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + A\,[1,2,3,..n,n]^{(p-1)}\,.\,A^{(n)}$$

Wir haben für die gedoppelten Verbindungen mit Wiederholung ein Gesetz gefunden, welches der Gleichung 58 entspricht; auf gleiche Weise ergibt sich nun auch, wenn statt der allein stehenden Elemente $A_1, A_2, ..A_{m-p+1}$ gesetzt wird, $1A_1, 2A_2, 3A_3, ..(m-p+1)A_{m-p+1}$, ein, der Gleichung 60 entsprechendes Gesetz.

$$183)\quad m.A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) = (1|m-p+1)\,.\,A\left([1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)\,.\,A^{(1)}_{1|m-p+1} + (1|m-p+1)\,.\,A\left([1,2,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)\,.\,A^{(2)}_{1|m-p+1} + (1|m-p+1)\,.\,A\left([1,2,3,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)\,.\,A^{(3)}_{1|m-p+1} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + (1|m-p+1)\,.\,A\left([1,2,3,..n,n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)\,.\,A^{(n)}_{1|m-p+1}$$

Um mit grösserer Leichtigkeit die Gesetze 181 und 183 zu erkennen, sey $n=3$, $p=3$, $m=5$, so ist

$$3.A\left([1,2,3]^{(3)}\,f(5)\right) = A\left([1,1,2,3]^{(3)}\,f(4|2)\right)\,.\,A^{(1)}_{1|2} + A\left([1,2,2,3]^{(3)}\,f(4|2)\right)\,.\,A^{(2)}_{1|2} + A\left([1,2,3,3]^{(3)}\,f(4|2)\right)\,.\,A^{(3)}_{1|2}$$

$$= A\left([1,1,2,3]^{(2)}\,f(4)\right).A^{(1)}_{1} + A\left([1,1,2,3]^{(2)}\,f(3)\right).A^{(1)}_{2} + A\left([1,1,2,3]^{(2)}\,f(2)\right).A^{(1)}_{3}$$
$$+ A\left([1,2,2,3]^{(2)}\,f(4)\right).A^{(2)}_{1} + A\left([1,2,2,3]^{(2)}\,f(3)\right).A^{(2)}_{2} + A\left([1,2,2,3]^{(2)}\,f(2)\right).A^{(2)}_{3}$$
$$+ A\left([1,2,3,3]^{(2)}\,f(4)\right).A^{(3)}_{1} + A\left([1,2,3,3]^{(2)}\,f(3)\right).A^{(3)}_{2} + A\left([1,2,3,3]^{(2)}\,f(2)\right).A^{(3)}_{3}$$

Digitized by Google

$$= A_1^{(1)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(1)} & A_1^{(1)}.A_3^{(2)} & A_1^{(1)}.A_3^{(3)} \\ 2 \quad 2 & 2 \quad 2 & 2 \quad 2 \\ 3 \quad 1 & 3 \quad 1 & 3 \quad 1 \end{vmatrix} + A_2^{(1)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_2^{(1)} & A_1^{(1)}.A_2^{(2)} & A_1^{(1)}.A_2^{(3)} \\ 2 \quad 1 & 2 \quad 1 & 2 \quad 1 \end{vmatrix} + A_3^{(1)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(1)} & A_1^{(1)}.A_1^{(2)} & A_1^{(1)}.A_1^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(2)}.A_3^{(1)} & A_1^{(2)}.A_3^{(2)} & A_1^{(2)}.A_3^{(3)} \\ 2 \quad 2 & 2 \quad 2 & 2 \quad 2 \\ 3 \quad 1 & 3 \quad 1 & 3 \quad 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(2)}.A_2^{(1)} & A_1^{(2)}.A_2^{(2)} & A_1^{(2)}.A_2^{(3)} \\ 2 \quad 1 & 2 \quad 1 & 2 \quad 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(2)}.A_1^{(1)} & A_1^{(2)}.A_1^{(2)} & A_1^{(2)}.A_1^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^{(3)}.A_3^{(1)} & A_1^{(3)}.A_3^{(2)} & A_1^{(3)}.A_3^{(3)} \\ 2 \quad 2 & 2 \quad 2 & 2 \quad 2 \\ 3 \quad 1 & 3 \quad 1 & 3 \quad 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(3)}.A_2^{(1)} & A_1^{(3)}.A_2^{(2)} & A_1^{(3)}.A_2^{(3)} \\ 2 \quad 1 & 2 \quad 1 & 2 \quad 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(3)}.A_1^{(1)} & A_1^{(3)}.A_1^{(2)} & A_1^{(3)}.A_1^{(3)} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$+\ A_1^{(0)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(0)} & 2 & 2 \\ & 3 & 1 \\ A_1^{(1)}.A_3^{(0)} & 2 & 2 \\ & 3 & 1 \\ A_1^{(1)}.A_3^{(0)} & 2 & 2 \\ & 3 & 1 \\ A_1^{(1)}.A_3^{(2)} & 2 & 2 \\ & 3 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_3^{(0)} & 2 & 2 \\ & 3 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_3^{(0)} & 2 & 2 \\ & 3 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_3^{(1)} & 2 & 2 \\ & 3 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_3^{(2)} & 2 & 2 \\ & 3 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_3^{(2)} & 2 & 2 \\ & 3 & 1 \end{vmatrix} + A_2^{(0)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_2^{(0)} & 2 & 1 \\ A_1^{(1)}.A_2^{(0)} & 2 & 1 \\ A_1^{(1)}.A_2^{(0)} & 2 & 1 \\ A_1^{(1)}.A_2^{(2)} & 2 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(0)} & 2 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(0)} & 2 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(1)} & 2 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(0)} & 2 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(0)} & 2 & 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(1)} & 2 & 1 \end{vmatrix} + A_3^{(0)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(0)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(0)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(0)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(2)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(0)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(0)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(2)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(0)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(2)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(2)} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$+\ A_1^{(3)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_3^{(1)} & A_1^{(1)}.A_2^{(1)} & A_3^{(1)} \times A_1^{(1)}.A_1^{(1)} \\ 2\quad 2 & 2\quad 1 & A_1^{(1)}.A_1^{(2)} \\ 3\quad 1 & A_1^{(1)}.A_2^{(2)} & A_1^{(1)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(2)} & 2\quad 1 & A_1^{(2)}.A_1^{(1)} \\ 2\quad 2 & A_1^{(1)}.A_2^{(3)} & A_1^{(2)}.A_1^{(2)} \\ 3\quad 1 & 2\quad 1 & A_1^{(2)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(1)}.A_3^{(3)} & A_1^{(2)}.A_2^{(1)} & A_1^{(3)}.A_1^{(1)} \\ 2\quad 2 & 2\quad 1 & A_1^{(3)}.A_1^{(2)} \\ 3\quad 1 & A_1^{(2)}.A_2^{(2)} & A_1^{(3)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(2)}.A_3^{(1)} & 2\quad 1 & \\ 2\quad 2 & A_1^{(2)}.A_2^{(3)} & \\ 3\quad 1 & 2\quad 1 & \\ A_1^{(2)}.A_3^{(2)} & A_1^{(3)}.A_2^{(1)} & \\ 2\quad 2 & 2\quad 1 & \\ 3\quad 1 & A_1^{(3)}.A_2^{(2)} & \\ A_1^{(2)}.A_3^{(3)} & 2\quad 1 & \\ 2\quad 2 & A_1^{(3)}.A_2^{(3)} & \\ 3\quad 1 & 2\quad 1 & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(1)} & & \\ 2\quad 2 & & \\ 3\quad 1 & & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(2)} & & \\ 2\quad 2 & & \\ 3\quad 1 & & \\ A_1^{(3)}.A_3^{(3)} & & \\ 2\quad 2 & & \\ 3\quad 1 & & \end{vmatrix} + A_2^{(3)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_2^{(1)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_2^{(2)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(1)}.A_2^{(3)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(1)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(2)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(2)}.A_2^{(3)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(3)}.A_2^{(1)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(3)}.A_2^{(2)} \\ 2\quad 1 \\ A_1^{(3)}.A_2^{(3)} \\ 2\quad 1 \end{vmatrix} + A_3^{(3)} \times \begin{vmatrix} A_1^{(1)}.A_1^{(1)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(2)} \\ A_1^{(1)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(1)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(2)} \\ A_1^{(2)}.A_1^{(3)} \\ A_1^{(3)}.A_1^{(1)} \\ A_1^{(3)}.A_1^{(2)} \\ A_1^{(3)}.A_1^{(3)} \end{vmatrix}$$

In dieser Entwickelung erscheint jede Verbindung ganz richtig dreimal; vervielfachen wir aber jede Colonne, der Reihe nach, mit

Digitized by Google

1, 2, 3, so entsteht jede Verbindung fünfmal. Z. B. das Produkt $A_1^{(1)} . A_1^{(2)} . A_2^{(3)}$ steht in der ersten Gruppe erster Colonne einmal, in der zweiten Gruppe erster Colonne einmal und in der dritten Gruppe dritter Colonne dreimal; daher im Ganzen $1+1+3 = 5$ mal; dasselbe gilt von jeder andern Verbindung.

Vervielfachen wir die Gleichung 181 mit $\alpha-\beta$ und 183 mit β, so wird, wenn beide durch Zuzählen vereinigt werden,

$$
\begin{aligned}
184)\quad \Big(\alpha . p+\beta\,(m-p)\Big) \,.\, A\,\Big([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\Big) &= \\
= \Big(\alpha+(o\,|\,m-p)\,\beta\Big) \,.\, A\,\Big([1,1,2,3,4,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\Big) \,.\, A^{(1)}_{|m-p+1} & \\
+ \Big(\alpha+(o\,|\,m-p)\,\beta\Big) \,.\, A\,\Big([1,2,2,3,4,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\Big) \,.\, A^{(1)}_{|m-p+1} & \\
+ \Big(\alpha+(o\,|\,m-p)\,\beta\Big) \,.\, A\,\Big([1,2,3,3,4,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\Big) \,.\, A^{(2)}_{|m-p+1} & \\
+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \\
+ \Big(\alpha+(o\,|\,m-p)\,\beta\Big) \,.\, A\,\Big([1,2,3,..n,n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,p-1)\Big) \,.\, A^{(n)}_{|m-p+1} &
\end{aligned}
$$

Lässt man die oberen Stellenzahlen gleich werden, so entsteht

$$
\begin{aligned}
\Big(\alpha+\frac{m-p}{p}\,\beta\Big) \,.\, A\,\Big(f(m)\,(1,2,3,..)\Big)^{(p)} = \quad & \alpha \;.\; A\,\Big(f(m-1)\,(1,2,3,..)\Big)^{(p-1)} \,.\, A_1 \\
+ \Big(\alpha+1\,.\,\beta\Big) \;.\; & A\,\Big(f(m-2)\,(1,2,3,..)\Big)^{(p-1)} \,.\, A_1 \\
+ \Big(\alpha+2\,.\,\beta\Big) \;.\; & A\,\Big(f(m-3)\,(1,2,3,..)\Big)^{(p-1)} \,.\, A_1 \\
+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \\
+ \Big(\alpha+(m-p)\,\beta\Big) \,.\, & A\,\Big(f(p-1)\,(1,2,3,..)\Big)^{(p-1)} \,.\, A_{m-p+1}
\end{aligned}
$$

Die beiden Gleichungen 61 und 184 fallen mithin in eine zusammen oder vereinigen sich in demselben Gesetze, wenn wir die oberen Stellenzahlen in beiden gleich annehmen.

Digitized by Google

§. 19.

Wir kehren wieder zur Gleichung 181 zurück, vervielfachen sie mit $p-1$, wenden das Gesetz dieser Gleichung auf die einzelnen Glieder derselben an und erhalten

$$\frac{P^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= A\left((1,1)^{(2)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ A\left((1,2)^{(2)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,1,2,2,3,..n]^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ A\left((1,3)^{(2)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,1,2,3,3,..n]^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ A\left((n,n)^{(2)} f(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n,n,n]^{(p-2)} f(m-2|p-2)\right)$$

Die Wiederholung dieses Geschäftes führt zuletzt zur Gleichung

185) $$\frac{P^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= A\left((1_1,1,..1_h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([1_1,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ A\left((1_1,1,..1_{h-1},2)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([1_1,1,..1_{h-1},2,2,3,..n]^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ A\left((1_1,1,..1_{h-1},3)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([1_1,1,..1_{h-1},2,3,3,..n]^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ A\left((n_1,n,..n_h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n,n_1,..n_h]^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

Wir haben in dieser Gleichung wieder ein eigenthümliches Gesetz, welches dem der Gleichung 63 entspricht. Die ursprünglichen Verbindungsklassen haben Elemente aufgenommen und werden mit neuen Verbindungsklassen aus den aufgenommenen Elementen vervielfacht. Während nun, in den neuen Verbindungsklassen, die oberen Stellenzahlen geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen bilden, wechseln die Elemente der einzelnen Klassen selbst nach dem Gesetze der geordneten Verbindungen mit Wiederholungen. Analog, der in 63 eingeführten Bezeich-

Digitized by Google

nung, wiederholen wir auch hier die erste Klammer, so dass das obige Gesetz auch ausgedrückt werden kann durch

$$\frac{p^{h|-s}}{1^{h|s}} \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\, f(m)\right) =$$
$$= A\left([(1_s,1,..1_h)^{(h)}\, f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([[1_s,1,..1_h,1,2,..n]^{(p-h)}\, f(m-h|q-h)\right)$$

Werden hierin die oberen Stellenzahlen gleich, so werden alle Horizontalreihen gleich, deren Anzahl $= \frac{n^{h|s}}{1^{h|s}}$. Jede Horizontalreihe ist ausserdem gleich oft vorhanden, nämlich $\frac{(n+h)^{p-h|s}}{1^{p-h|s}}$ mal. Es ist mithin

$$\frac{p^{h|-s}}{1^{h|s}} \cdot \frac{n^{p|s}}{1^{p|s}} \cdot A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)} =$$
$$= \frac{n^{h|s}}{1^{h|s}} \cdot \frac{(n+h)^{p-h|s}}{1^{p-h|s}} \cdot A\left(f(h|m-p+h)\,(1,2,3,..)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(m-h|p-h)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$
$$= \frac{p^{h|-s}}{1^{h|s}} \cdot \frac{n^{p|s}}{1^{p|s}} \cdot A\left(f(h|m-p+h)\,(1,2,3,..)\right)^{(h)} \cdot A\left(f(m-h|p-h)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$

oder

$$A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)} = A\left(f(h|m-p+h)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)} \cdot A\left(f(m-h|p-h)\,(1,2,3,..)\right)^{(p-h)}$$

Hier erhalten wir wieder die Gleichung 64 und wir finden: Die verschiedenen Gesetze 63 und 185 vereinigen sich zu einem einzigen, wenn wir die oberen Stellenzahlen gleich werden lassen.

Zu einem andern speciellen Falle gelangen wir, wenn wir die unteren Stellenzahlen gleich annehmen. Es wird alsdann

186) $$\frac{p^{h|-s}}{1^{h|s}} \cdot A[1,2,3,..n]^{(p)} = A^{(s)} \cdot A^{(s)} \ldots A^{(s)} \cdot A[1_s,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-h)}$$
$$+ A^{(s)} \cdot A^{(s)} \ldots A^{(s)} \cdot A[1_s,1,..1_{h-s},1,2,2,3,..n]^{(p-h)}$$
$$+ A^{(s)} \cdot A^{(s)} \ldots A^{(2)} \cdot A[1_s,1,..1_{h-s},1,2,3,3,..n]^{(p-h)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A^{(n)} \cdot A^{(n)} \ldots A^{(n)} \cdot A[1,2,3,..n,n_s,..n_h]^{(p-h)}$$

Die grosse Uebereinstimmung dieser Untersuchung mit der des §. 6 erlaubt uns blos anzuführen, dass, so wie wir aus 181 die Gleichung 185 hergeleitet haben, wir auch aus 183 die folgende erhalten:

Digitized by Google

187) $$m \cdot \frac{(p-1)^{h-1|-1}}{1^{h-1|1}} \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= (h|m-p+h) \cdot A\left((1_1,1,..1_h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([1_1,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

$$+ (h|m-p+h) \cdot A\left((1_1,1,..1_{h-1},2)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([1_1,1,..1_{h-1},1,2,\dot{2},3,..n]^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

$$+ (h|m-p+h) \cdot A\left((1_1,1,..1_{h-1},3)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([1_1,\bar{1},..1_{h-1},1,2,3,3,..n]^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

$$+ \quad .$$

$$+ (h|m-p+h) \cdot A\left((n_1,n,..n_h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([1,2,..n,n_1,n,n_h]^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

$$= (h|m-p+h) \cdot A\left([(1_1,1,..1_h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([[1_1,1,..1_h,1,2,..n]^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

Vervielfachen wir diese Gleichung mit β, die 185 aber mit $\alpha - h\beta$ und zählen beide zusammen, so wird

188) $$\frac{p^{h|-1}}{1^{h|1}} \left(\alpha + \frac{(m-p)\,h}{p}\beta\right) A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= \left\{\alpha + (o|m-p)\,\beta\right) A\left([(1_1,1,..1_h)^{(h)} f(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([[1_1,1,..1_h,1,2,..n]^{(p-h)} f(m-h|p-h)\right)$$

Hieraus kann man wieder die Gleichung 68 ableiten.

§. 20.

Nach 104 bilden wir wieder die Gleichungen

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= A\left([1,1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) - A\left([1,1,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) \cdot A^{(1)}_{1|m-p+1}$$

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= A\left([1,2,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) - A\left([1,2,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) \cdot A^{(2)}_{1|m-p+1}$$

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= A\left([1,2,3,3,..n]^{(p)} f(m)\right) - A\left([1,2,3,3,..n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) \cdot A^{(3)}_{1|m-p+1}$$

$$. \quad .$$

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) =$$

$$= A\left([1,2,3,..n,n]^{(p)} f(m)\right) - A\left([1,2,3,..n,n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right) \cdot A^{(n)}_{1|m-p+1}$$

und vereinigen sie durch Zuzählen, so wird

Digitized by Google

$$189)\quad n \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) =$$
$$= A\left((1)^{(o)} f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,1,2,3,..n]^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$+ A\left((2)^{(o)} f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,2,3,..n]^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$+ A\left((3)^{(o)} f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,3,3,..n]^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left((n)^{(o)} f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n,n]^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$- A\left((1)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,1,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$
$$- A\left((2)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$
$$- A\left((3)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,3,3,..n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- A\left((n)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n,n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$

Diese Gleichung vervielfachen wir mit $n+1$ und ersetzen die einzelnen Glieder, nach demselben Gesetze, durch andere, die wieder ein Element mehr enthalten. Die neuen Verbindungen, welche entstehen, sind die gedoppelten Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Elementen, welche in die anfänglichen Verbindungen erst aufgenommen oder in ihnen wiederholt wurden. Man erhält

$$\frac{n^{n|}}{1^{n|}} A\left([1,2,3,..n]^{(p)} f(m)\right) =$$
$$= A\left((1,1)^{(o)} f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,1,1,2,3,..n]^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$+ A\left((1,2)^{(o)} f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,1,2,2,3,..n]^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$+ A\left((1,3)^{(o)} f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,1,2,3,3,..n]^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\left((n,n)^{(o)} f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n,n,n]^{(p)} f(m|p)\right)$$
$$- A\left((1,1)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,1,1,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$
$$- A\left((1,2)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,1,2,2,3,..n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- A\left((n,n)^{(1)} f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n,n,n]^{(p-1)} f(m-1|p-1)\right)$$

Digitized by Google

$$+ A\left((1,1)^{(1)}\,f\,(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$
$$+ A\left((1,2)^{(1)}\,f\,(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,1,2,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$
$$+ \quad .$$
$$+ A\left((n,n)^{(1)}\,f\,(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n,n,n]^{(p-1)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$

Das Gesetz, nach welchem die Elemente sich verändern, wollen wir, wie früher, durch die Wiederholung der Klammern bezeichnen, alsdann können wir die vorstehende Gleichung kurz auf folgende Art darstellen:

$$\frac{n^{\underline{|p}}}{1^{\underline{|p}}} \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) =$$
$$= A\left([(1,1)^{(0)}\,f\,(0|m-p)\right) \cdot A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m|p)\right)$$
$$+ A\left([(1,1)^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([(1,1)^{(1)}\,f\,(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$

Auf gleiche Weise können wir neue Elemente aufnehmen. Wir vervielfachen zuerst mit $n+2$, und ersetzen dann die Glieder aller Horizontalreihen durch andere, welche ein Element mehr enthalten. Das Gesetz liegt deutlich vor. Werden h Elemente aufgenommen, so ist

$$190)\quad \frac{n^{\underline{|h}}}{1^{\underline{|h}}} \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) =$$
$$= A\left([(1,,1,..1_h)^{(0)}\,f\,(0|m-p)\right) \cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m|p)\right)$$
$$- A\left([(1,,1,..1_h)^{(1)}\,f\,(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left([(1,,1,..1_h)^{(2)}\,f\,(2|m-p+2)\right) \cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f\,(m-2|p-2)\right)$$
$$- \quad .$$
$$(-)^h A\left([(1,,1,..1_h)^{(h)}\,f\,(h|m-p+h)\right) \cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-h)}\,f\,(m-h|p-h)\right)$$

Für die Gleichheit der unteren Stellenzahlen geht diese Gleichung in die folgende über.

Digitized by Google

$$191)\quad \frac{n^{h|'}}{1^{h|'}} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(p)} = A\,[(1,,1,..1_h)^{(o)} \cdot A\,[[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p)}$$
$$- A\,[(1,,1,..1_h)^{(1)} \cdot A\,[[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-1)}$$
$$+ A\,[(1,,1,..1_h)^{(2)} \cdot A\,[[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-2)}$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$(-)^h \cdot A\,[(1,,1,..1_h)^{(h)} \cdot A\,[[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-h)}$$

Wir wollen jetzt die Gleichung 183 mit 189 durch Abzählen verbinden. Es entsteht

$$\left(1-\frac{m}{n}\right) \cdot \frac{n^{'|'}}{1^{'|'}} \cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left((1)^{(o)}\,f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$-(2|m-p+2)\,A\left((1)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ A\left((2)^{(o)}\,f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,2,3,..n]^{(p)}\,f(m|p)\right)$$
$$-(2|m-p+2)\,A\left((2)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$
$$+ \quad .$$
$$- \quad .$$
$$+ A\left((n)^{(o)}\,f(o|m-p)\right) \cdot A\left([1,2,3,..n,n]^{(p)}\,f\,m|p)\right)$$
$$-(2|m-p+2)\,A\left((n)^{(1)}\,f(1|m-p+1)\right) \cdot A\left([1,2.3,..n,n]^{(p-1)}\,f(m-1|p-1)\right)$$

Diese Gleichung vervielfachen wir mit $n+1$, ersetzen sodann die Glieder derselben nach dem Gesetze 189 durch andere Verbindungsklassen, welche ein Element mehr enthalten, und messen durch 2. Die Vorzahlen vereinigen sich zu neuen Verbindungen, deren obere Stellenzahlen nur aus jenen Zahlen gebildet werden dürfen, welche erst in die anfänglichen Klassen aufgenommen worden sind, und ihre Zusammenstellung erfolgt nach dem Gesetze der geordneten Verbindungen ohne Wiederholung. Es wird, wenn wir für den Wechsel der Elemente unser früheres Zählen wieder benutzen

Digitized by Google

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{n^{\underline{1}\,|\,s}}{1^{\underline{1}\,|\,s}}\cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{2}\middle|\frac{m-p+2}{2}\right)\cdot A\left([(1,1)^{(0)}f(0|m-p)\right)\cdot A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$

$$-\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{m-p+3}{2}\right)\cdot A\left([(1,1)^{(1)}f(1|m-p+1)\right)\cdot A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$

$$+\left(\frac{4}{2}\middle|\frac{m-p+4}{2}\right)\cdot A\left([(1,1)^{(2)}f(2|m-p+2)\right)\cdot A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$

Geht man auf diesem Wege weiter, so gelangt man zuletzt zur allgemeinen Gleichung

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{n^{\underline{h}\,|\,s}}{1^{\underline{h}\,|\,s}}\cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right)=$$

$$=\left(\frac{h}{h}\middle|\frac{m-p+h}{h}\right)\cdot A\left([(1,,1,..1_h)^{(0)}f(0|m-p)\right)\cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$

$$-\left(\frac{h+1}{h}\middle|\frac{m-p+h+1}{h}\right)\cdot A\left([(1,,1,..1_h)^{(1)}f(1|m-p+1)\right)\cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$

$$+\left(\frac{h+2}{h}\middle|\frac{m-p+h+2}{h}\right)\cdot A\left([(1,,1,..1_h)^{(2)}f(2|m-p+2)\right)\cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$

$$-\ .$$

$$(-)^h\cdot\left(\frac{2h}{h}\middle|\frac{m-p+2h}{h}\right)\cdot A\left([(1,,1,..1_h)^{(h)}f(h|m-p+h)\right)\cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-h)}f(m-h|p-h)\right)$$

Wie die Gleichung 71 zerfällt auch diese in zwei Theile, in die Gleichung 190 und in die folgende.

$$\frac{m.h}{n}\cdot\frac{n^{\underline{h}\,|\,s}}{1^{\underline{h}\,|\,s}}\cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right)=$$

$$=(1|m-p+1)\cdot A\left([(1,,1,..1_h)^{(1)}f(1|m-p+1)\right)\cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$

$$-(2|m-p+2)\cdot A\left([(1,,1,..1_h)^{(2)}f(2|m-p+2)\right)\cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$

$$+(3|m-p+3)\cdot A\left([(1,,1,..1_h)^{(3)}f(3|m-p+3)\right)\cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-3)}f(m-3|p-3)\right)$$

$$-\ .$$

$$(-)^{h-1}\cdot(h|m-p+h)\cdot A\left([(1,,1,..1_h)^{(h)}f(h|m-p+h)\right)\cdot A\left([[1,,1,..1_h,1,2,3,..n]^{(p-h)}f(m-h|p-h)\right)$$

Vervielfachen wir nun 190 mit α und die vorstehende Gleichung mit β, und verbinden beide durch Abzählen, so wird

Digitized by Google

$$192)\quad \left(\alpha-\frac{mh}{n}\beta\right)\frac{n^{\underline{h}|_{\iota}}}{1^{\underline{h}|_{\iota}}}\cdot A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right)=$$

$$=\left(\alpha+(0|m-p)\beta\right).A\left([(1_{\iota},1,..1_h)^{(o)}f(0|m-p)\right).A\left([[1_{\iota},1,..1_h,1,2,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$-\left(\alpha+(1|m-p+1)\beta\right).A\left([(1_{\iota},1,..1_h)^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([[1_{\iota},1,..1_h,1,2,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+\left(\alpha+(2|m-p+2)\beta\right).A\left([(1_{\iota},1,..1_h)^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([[1_{\iota},1,..1_h,1,2,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$-\ .$$
$$(-)^h.\left(\alpha+(h|m-p+h)\beta\right).A\left([(1_{\iota},1,..1_h)^{(h)}f(h|m-p+h)\right).A\left([[1_{\iota},1,..1_h,1,2,..n]^{(p-h)}f(m-h|p-h)\right)$$

Die Gleichung 75 entspricht der Gleichung 26. Eben so entspricht 192 der Gleichung 134. Es gibt noch zwei andere Gesetze, welche denen in 47 und 116 entsprechen, sie sind

$$193)\quad \left(\alpha-\frac{m.h}{n}\beta\right)\frac{n^{\underline{h}|_{\iota}}}{1^{\underline{h}|_{\iota}}}A\left((1,2,3,..n)^{(p)}f(m)\right)=$$

$$=\left(\alpha+(0|m-p)\beta\right)A\left([[1,1,..1_h]^{(o)}f(0|m-p)\right).A\left([(1,1,..1_h,1,2,..n)^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$-\left(\alpha+(1|m-p+1)\beta\right)A\left([[1,1,..1_h]^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([(1,1,..1_h,1,2,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+\left(\alpha+(2|m-p+2)\beta\right)A\left([[1,1,..1_h]^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([(1,1,..1_h,1,2,..n)^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$-\ .$$
$$(-)^h.\left(\alpha+(h|m-p+h)\beta\right)A\left([[1,1,..1_h]^{(h)}f(h|m-p+h)\right).A\left([(1,1,..1_h,1,2,..n)^{(p-h)}f(m-h|p-h)\right)$$

und

$$194)\quad \left(\alpha+\frac{m.h}{n}\beta\right)\frac{n^{\underline{h}|_{-\iota}}}{1^{\underline{h}|_{\iota}}}A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right)=$$

$$=\left(\alpha+(0|m-p)\beta\right)A\left([1,2,..h]^{(o)}f(0|m-p)\right).A\left([h+1,h+2,..n]^{(p)}f(m|p)\right)$$
$$+\left(\alpha+(1|m-p+1)\beta\right)A\left([1,2,..h]^{(1)}f(1|m-p+1)\right).A\left([h+1,h+2,..n]^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$$
$$+\left(\alpha+(2|m-p+2)\beta\right)A\left([1,2,..h]^{(2)}f(2|m-p+2)\right).A\left([h+1,h+2,..n]^{(p-2)}f(m-2|p-2)\right)$$
$$+\ .$$
$$+\left(\alpha+(h|m-p+h)\beta\right)A\left([1,2,..h]^{(h)}f(h|m-p+h)\right).A\left([h+1,h+2,..n]^{(p-h)}f(m-h|p-h)\right)$$

Lassen wir in diesen vier Gleichungen die unteren Stellenzahlen gleich werden, so werden die Glieder irgend einer Horizontal-

Digitized by Google

reihe gleich, nur entstehen sie nicht gleich oft. Die $(x+1)$te Reihe z. B. in 75 wird

$$A((1,2,3,..h)^{(x)} \cdot A((h+1,h+2,..n)^{(p-x)} \cdot \Big(\Big(\alpha+x\beta\Big) \cdot \frac{(x-1)^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}} \cdot \frac{(m-x-1)^{p-x-1|-1}}{1^{p-x-1|1}}$$
$$+ \Big(\alpha+(x+1)\beta\Big) \cdot \frac{x^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}} \cdot \frac{(m-x-2)^{p-x-1|-1}}{1^{p-x-1|1}}$$
$$+ \Big(\alpha+(x+2)\beta\Big) \cdot \frac{(x+1)^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}} \cdot \frac{(m-x-3)^{p-x-1|-1}}{1^{p-x-1|1}}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \Big(\alpha+(m-p+x)\beta\Big) \cdot \frac{(m-p+x-1)^{x-1|-1}}{1^{x-1|1}} \cdot \frac{(p-x-1)^{p-x-1|-1}}{1^{p-x-1|1}} \Big)$$

Diese Reihe summiren wir nach der neunten Abhandlung der Analysis und erhalten für die $(x+1)$te Horizontalreihe

$$\frac{(m-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \Big(\alpha+\frac{m.x}{p}\beta\Big) A((1,2,3,..h)^{(x)} \cdot A((h+1,h+2,..n)^{(p-x)}$$

den ersten Faktor nehmen wir von beiden Seiten hinweg und erhalten, indem wir $x = 0, 1, 2, .. h$ und $m = p$ setzen,

Aus 75

195) $$\Big(\alpha+\frac{p.h}{n}\beta\Big) \cdot \frac{n^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot A(1,2,3,..n)^{(p)} =$$
$$= \alpha \cdot A((1,2,3,..h)^{(0)} \cdot A((h+1,h+2,..n)^{(p)}$$
$$+ \Big(\alpha+1.\beta\Big) \cdot A((1,2,3,..h)^{(1)} \cdot A((h+1,h+2,..n)^{(p-1)}$$
$$+ \Big(\alpha+2.\beta\Big) \cdot A((1,2,3,..h)^{(2)} \cdot A((h+1,h+2,..n)^{(p-2)}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \Big(\alpha+h.\beta\Big) \cdot A((1,2,3,..h)^{(h)} \cdot A((h+1,h+2,..n)^{(p-h)}$$

Aus 192

Digitized by Google

$$196)\quad \left(\alpha - \frac{p.h}{n}\beta\right) \cdot \frac{n^{h|\cdot}}{1^{h|\cdot}} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(p)} =$$

$$= \alpha \cdot A\,[(1,1,..1_h)^{(\cdot)} \cdot A\,[[1,1,..1_h,1,2,..n]^{(p)}$$
$$- \left(\alpha+1.\beta\right) \cdot A\,[(1,1,..1_h)^{(1)} \cdot A\,[[1,1,..1_h,1,2,..n]^{(p-1)}$$
$$+ \left(\alpha+2.\beta\right) \cdot A\,[(1,1,..1_h)^{(2)} \cdot A\,[[1,1,..1_h,1,2,..n]^{(p-2)}$$
$$- \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$(-)^h \cdot \left(\alpha+h.\beta\right) \cdot A\,[(1,1,..1_h)^{(h)} \cdot A\,[[1,1,..1_h,1,2,..n]^{(p-h)}$$

Aus 193

$$197)\quad \left(\alpha - \frac{p.h}{n}\beta\right) \cdot \frac{n^{h|\cdot}}{1^{h|\cdot}} \cdot A\,(1,2,3,..n)^{(p)} =$$

$$= \alpha \cdot A\,[[1,1,..1_h]^{(\cdot)} \cdot A\,[(1,1,..1_h,1,2,..n)^{(p)}$$
$$- \left(\alpha+1.\beta\right) \cdot A\,[[1,1,..1_h]^{(1)} \cdot A\,[(1,1,..1_h,1,2,..n)^{(p-1)}$$
$$+ \left(\alpha+2.\beta\right) \cdot A\,[[1,1,..1_h]^{(2)} \cdot A\,[(1,1,..1_h,1,2,..n)^{(p-2)}$$
$$- \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$(-)^h \cdot \left(\alpha+h.\beta\right) \cdot A\,[[1,1,..1_h]^{(h)} \cdot A\,[(1,1,..1_h,1,2,..n)^{(p-h)}$$

Aus 194

$$198)\quad \left(\alpha + \frac{p.h}{n}\beta\right) \cdot \frac{n^{h|-\cdot}}{1^{h|\cdot}} \cdot A\,[1,2,3,..n]^{(p)} =$$

$$= \alpha \cdot A\,([1,2,3,..h]^{(\cdot)} \cdot A\,([h+1,h+2,..n]^{(p)}$$
$$+ \left(\alpha+1.\beta\right) \cdot A\,([1,2,3,..h]^{(1)} \cdot A\,([h+1,h+2,..n]^{(p-1)}$$
$$+ \left(\alpha+2.\beta\right) \cdot A\,([1,2,3,..h]^{(2)} \cdot A\,([h+1,h+2,..n]^{(p-2)}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ \left(\alpha+h.\beta\right) \cdot A\,([1,2,3,..h]^{(h)} \cdot A\,([h+1,h+2,..n]^{(p-h)}$$

Diese Gleichungen, welche, nach der einmal angegebenen Methode, leicht aus unsern früheren Gesetzen hergeleitet werden können, lassen vermuthen, dass, wie bei vielen früheren Gleichungen, auch hier ein Wechsel der Elemente eintreten kann. Wir übergehen diesen Gegenstand, um eine Schrift nicht zu sehr auszudehnen, welche blos bezweckt, zu Untersuchungen über die allgemeinsten Verbindungen anzuregen.

Digitized by Google

§. 21.

Unsere Untersuchungen über die gedoppelten Verbindungen mit Wiederholung haben uns zu Wahrheiten geführt, von denen bis jetzt nur sehr specielle Fälle bekannt waren, welche wir auch jederzeit angeführt. Ausserdem haben wir aber auch noch viele andere Gesetze gefunden, die bisher gänzlich unbekannt waren. Von der folgenden Untersuchung findet man bei den Mathematikern ebenfalls noch keine Spur.

Wir lassen in dem Folgenden die unteren Stellenzahlen unserer Elemente Beschränkungen erfahren, und suchen zuerst die Verbindungen mit unbeschränkten unteren Stellenzahlen durch andere darzustellen, in welchen bestimmte untere Zahlen ausgeschlossen sind.

Die Ausdehnung, welche wir dieser Schrift zu geben beabsichtigten, erlaubt uns nicht, eine ausführliche Darstellung des Gegenstandes hier zu geben. Wir begnügen uns mit der Angabe, dass die Untersuchung auf gleiche Weise wie die des §. 8 geführt werden kann, und dass man zuletzt zu nachstehendem Gesetze gelangt:

$$199)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right) =$$
$$= A\left([(0)^{(0)}\,f(0)\,(s)\right)\ .\ A\left([[1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$+\ A\left([(1)^{(1)}\,f(s)\,(s)\right)\ .\ A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f(m-s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$+\ A\left([(1,1)^{(2)}\,f(2s)\,(s)\right)\ .\ A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f(m-2s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$+\ .$$

Diese Reihe bricht ab, wenn $m-qs = 0$ oder einer negativen Grösse gleich wird. Um die Bedeutung dieser Gleichung richtig aufzufassen, sey $n=3$, $p=4$, $m=7$ und $s=1$, alsdann ist

Digitized by Google

$$A\left([1,2,3]^{(4)}\,f(7)\right) = A\left([1,2,3]^{(4)}\,f(7)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left([(1)^{(1)}\,f(1)\,(1)\right) \cdot A\left([[1,1,2,3]^{(3)}\,f(6)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left([(1,1)^{(2)}\,f(2)\,(1)\right) \cdot A\left([[1,1,1,2,3]^{(2)}\,f(5)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left([(1,1,1)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([[1,1,1,1,2,3]^{(1)}\,f(4)\,(2,3,..)\right)$$

Das erste Glied ist = o, da bei ausgeschlossenem A_1 aus $A_1 . A_3$ u. s. w. zu vier Elementen keine Verbindungen zur Summe 7 gebildet werden können, daher

$$A\left([1,2,3]^{(4)}\,f(7)\right) = A\left((1)^{(1)}\,f(1)\,(1)\right) \cdot A\left([1,1,2,3]^{(3)}\,f(6)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((2)^{(1)}\,f(1)\,(1)\right) \cdot A\left([1,2,2,3]^{(3)}\,f(6)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((3)^{(1)}\,f(1)\,(1)\right) \cdot A\left([1,2,3,3]^{(3)}\,f(6)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((1,1)^{(2)}\,f(2)\,(1)\right) \cdot A\left([1,1,1,2,3]^{(2)}\,f(5)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((1,2)^{(2)}\,f(2)\,(1)\right) \cdot A\left([1,1,2,2,3]^{(2)}\,f(5)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((1,3)^{(2)}\,f(2)\,(1)\right) \cdot A\left([1,1,2,3,3]^{(2)}\,f(5)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((2,2)^{(2)}\,f(2)\,(1)\right) \cdot A\left([1,2,2,2,3]^{(2)}\,f(5)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((2,3)^{(2)}\,f(2)\,(1)\right) \cdot A\left([1,2,2,3,3]^{(2)}\,f(5)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((3,3)^{(2)}\,f(2)\,(1)\right) \cdot A\left([1,2,3,3,3]^{(2)}\,f(5)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((1,1,1)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([1,1,1,1,2,3]^{(1)}\,f(\overline{4})\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((1,1,2)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([1,1,1,2,2,3]^{(1)}\,f(4)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((1,1,3)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([1,1,1,2,3,3]^{(1)}\,f(4)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((1,2,2)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([1,1,2,2,2,3]^{(1)}\,f(4)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((1,2,3)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([1,1,2,2,3,3]^{(1)}\,f(4)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((1,3,3)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([1,1,2,3,3,3]^{(1)}\,f(4)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((2,2,2)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([1,2,2,2,2,3]^{(1)}\,f(4)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((2,2,3)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([1,2,2,2,3,3]^{(1)}\,f(4)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((2,3,3)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([1,2,2,3,3,3]^{(1)}\,f(4)\,(2,3,..)\right)$$
$$+ A\left((3,3,3)^{(3)}\,f(3)\,(1)\right) \cdot A\left([1,2,3,3,3,3]^{(1)}\,f(4)\,(2,3,..)\right)$$

Digitized by Google

$$= A_{\cdot}^{(1)} \times \begin{vmatrix} A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \end{vmatrix} + A_{\cdot}^{(2)} \times \begin{vmatrix} A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \end{vmatrix} + A_{\cdot}^{(3)} \times \begin{vmatrix} A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(1)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(2)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \\ A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)}.A_{\cdot}^{(3)} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$+\ A_1^{(1)}.A_1^{(1)} \times \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}.A_1^{(2)} \times \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} + A_1^{(1)}.A_1^{(3)} \times \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(1)} & A_2^{(3)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(1)} & A_2^{(3)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(1)} & A_2^{(3)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(1)} & A_2^{(4)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(1)} & A_2^{(4)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(1)} & A_2^{(4)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(5)}.A_3^{(1)} & A_2^{(5)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(5)}.A_3^{(1)} & A_2^{(5)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(5)}.A_3^{(1)} & A_2^{(5)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(6)}.A_3^{(1)} & A_2^{(6)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(6)}.A_3^{(1)} & A_2^{(6)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(6)}.A_3^{(1)} & A_2^{(6)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(7)}.A_3^{(1)} & A_2^{(7)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(7)}.A_3^{(1)} & A_2^{(7)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(7)}.A_3^{(1)} & A_2^{(7)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(8)}.A_3^{(1)} & A_2^{(8)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(8)}.A_3^{(1)} & A_2^{(8)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(8)}.A_3^{(1)} & A_2^{(8)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(9)}.A_3^{(1)} & A_2^{(9)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(9)}.A_3^{(1)} & A_2^{(9)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} & A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(9)}.A_3^{(1)} & A_2^{(9)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(1)} & A_2^{(3)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(1)} & A_2^{(3)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(1)} & A_2^{(3)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(1)} & A_2^{(4)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(1)} & A_2^{(4)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(1)} & A_2^{(4)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(5)}.A_3^{(1)} & A_2^{(5)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(5)}.A_3^{(1)} & A_2^{(5)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(5)}.A_3^{(1)} & A_2^{(5)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(6)}.A_3^{(1)} & A_2^{(6)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(6)}.A_3^{(1)} & A_2^{(6)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(6)}.A_3^{(1)} & A_2^{(6)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(7)}.A_3^{(1)} & A_2^{(7)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(7)}.A_3^{(1)} & A_2^{(7)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(7)}.A_3^{(1)} & A_2^{(7)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(8)}.A_3^{(1)} & A_2^{(8)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(8)}.A_3^{(1)} & A_2^{(8)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(8)}.A_3^{(1)} & A_2^{(8)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(9)}.A_3^{(1)} & A_2^{(9)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(9)}.A_3^{(1)} & A_2^{(9)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_2^{(2)}.A_3^{(1)} & A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ A_2^{(9)}.A_3^{(1)} & A_2^{(9)}.A_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$+\ A_1^{(1)}.A_1^{(2)} \times \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(1)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(1)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \end{vmatrix} + A_1^{(2)}.A_1^{(1)} \times \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(1)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(1)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \end{vmatrix} + A_1^{(3)}.A_1^{(3)} \times \begin{vmatrix} A_2^{(1)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(1)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(1)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(1)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(2)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(3)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(1)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(2)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(3)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \\ A_2^{(4)}.A_3^{(4)} \\ {\scriptstyle 3\quad 2} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&+ A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_1^{(1)} . (A_4^{(1)} + A_4^{(1)} + A_4^{(1)} + A_4^{(1)} + A_4^{(1)} + A_4^{(1)}) \\
&+ A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_1^{(2)} . (A_4^{(1)} + A_4^{(1)} + A_4^{(1)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)}) \\
&+ A_1^{(1)}.A_1^{(1)}.A_1^{(3)} . (A_4^{(1)} + A_4^{(1)} + A_4^{(1)} + A_4^{(2)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)}) \\
&+ A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(2)} . (A_4^{(1)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)}) \\
&+ A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(3)} . (A_4^{(1)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)}) \\
&+ A_1^{(1)}.A_1^{(3)}.A_1^{(3)} . (A_4^{(1)} + A_4^{(2)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)}) \\
&+ A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_1^{(2)} . (A_4^{(1)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)}) \\
&+ A_1^{(2)}.A_1^{(2)}.A_1^{(3)} . (A_4^{(1)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(2)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)}) \\
&+ A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_1^{(3)} . (A_4^{(1)} + A_4^{(2)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)}) \\
&+ A_1^{(3)}.A_1^{(3)}.A_1^{(3)} . (A_4^{(1)} + A_4^{(2)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)} + A_4^{(3)})
\end{aligned}
$$

Wir wollen jetzt annehmen, es seyen in 199 die oberen Stellenzahlen gleich, so entsteht

die 1te Horizontalreihe $\frac{n^{p|'}}{1^{p|'}}$ mal,

die 2te . . . . . $\frac{n^{1|'}}{1^{1|'}} \cdot \frac{(n+1)^{p-1|'}}{1^{p-1|'}} = \frac{p^{1|-'}}{1^{1|'}} \cdot \frac{n^{p|'}}{1^{p|'}}$ mal,

die 3te . . . . . $\frac{n^{2|-'}}{1^{2,'}} \cdot \frac{(n+2)^{p-2|'}}{1^{p-2|'}} = \frac{p^{2|-'}}{1^{2|'}} \cdot \frac{n^{p|'}}{1^{p|'}}$ mal u. s. w.

Auf der linken Seite erhalten wir gleichfalls den Faktor $\frac{n^{p|'}}{1^{p|'}}$, wird durch denselben gemessen, so bleibt

$$
\begin{aligned}
A\left(\int(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)} = {} & \frac{p^{0|-'}}{1^{0|'}} \cdot (A_s)^0 \cdot A\left(\int(m)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)^{(p)} \\
& + \frac{p^{1|-'}}{1^{1|'}} \cdot (A_s)^1 \cdot A\left(\int(m-s)\,(1,2,..s-1,\ s+1,..)\right)^{(p-1)} \\
& + \frac{p^{2|-'}}{1^{2|'}} \cdot (A_s)^2 \cdot A\left(\int(m-2s)\,(1,2,..s-1,\ s+1,..)\right)^{(p-2)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Hier erhalten wir also wieder, und zwar auf ganz anderem Wege, die Gleichung 80, und wir sehen, wie die verschiedenen Gesetze 79 und 199 im Falle der Gleichheit der oberen Stellenzahlen sich in ein einziges Gesetz 80 vereinigen.

Digitized by Google

So wie wir früher aus 79 die Gleichung 82 hergeleitet haben, so können wir auch aus 199 ein dieser Gleichung entsprechendes, erweitertes Gesetz herleiten. Die Methode ist dieselbe, wir führen daher blos an, dass, wenn die unteren Stellenzahlen $s, s+1, .. s+q-1$ nicht in den Verbindungen erscheinen dürfen, die folgende Gleichung statt findet.

$$
\begin{aligned}
200)\quad & A\left([1,2,3,..n]^{(p)} \mathfrak{f}(m)\right) = A\left([1,2,..n]^{(p)} \mathfrak{f}(m)(1,2,..s-1,s+q,..)\right) \\
& + A\left([(1)^{(1)} \mathfrak{f}(s|s+q-1)(s,s+1,..s+q-1)\right) . A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)} \mathfrak{f}(m-s|m-s-q+1)(1,2,..s-1,s+q,..)\right) \\
& + A\left([(1,1)^{(2)} \mathfrak{f}(2s|2s+2q-2)(s,s+1,..s+q-1)\right) . A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)} \mathfrak{f}(m-2s|m-2s-2q+2)(1,2,..s-1,s+q,..)\right) \\
& + A\left([(1,1,1)^{(3)} \mathfrak{f}(3s|3s+3q-3)(s,s+1,..s+q-1)\right) . A\left([[1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-3)} \mathfrak{f}(m-3s|m-3s-3q+3)(1,2,..s-1,s+q,..)\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Fehlen aber von s an, dies mit begriffen, alle höheren Elemente, so ist

$$
\begin{aligned}
201)\quad & A\left([1,2,3,..n]^{(p)} \mathfrak{f}(m)\right) = A\left([1,2,3,..n]^{(p)} \mathfrak{f}(m)(1,2,..s-1)\right) \\
& + A\left([(1)^{(1)} \mathfrak{f}(s|m-p+1)(s,s+1,..)\right) . A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)} \mathfrak{f}(m-s|p-1)(1,2,..s-1)\right) \\
& + A\left([(1,1)^{(2)} \mathfrak{f}(2s|m-p+2)(s,s+1,..)\right) . A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)} \mathfrak{f}(m-2s|p-2)(1,2,..s-1)\right) \\
& + A\left([(1,1,1)^{(3)} \mathfrak{f}(3s|m-p+3)(s,s+1,..)\right) . A\left([[1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-3)} \mathfrak{f}(m-3s|p-3)(1,2,..s-1)\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Setzen wir in 200 $s = 1$ und $q = s$, so wird

Digitized by Google

$$202)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right) = A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\,(s+1,s+2,..)\right)$$
$$+A\left([(1)^{(1)}\,f\,(1|s)\,(1,2,..s)\right).A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1|m-s)(s+1,s+2,..)\right)$$
$$+A\left([(1,1)^{(2)}\,f\,(2|2s)(1,2,..s)\right).A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f\,(m-2|m-2s)(s+1,s+2,..)\right)$$
$$+A\left([(1,1,1)^{(3)}\,f\,(3|3s)(1,2,..s)\right).A\left([[1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-3)}\,f\,(m-3|m-3s)(s+1,s+2,..)\right)$$
$$+\ .$$

Hier sind also die ersten s Elemente in den anfänglichen Verbindungsklassen ausgeschlossen. Lassen wir in den drei letzten Gleichungen die oberen Stellenzahlen gleich werden, so erhalten wir aus ihnen wieder die Gesetze 85, 86 und 87.

§. 22.

Es bleibt uns nun noch übrig, die Frage zu beantworten: Wie können die gedoppelten Verbindungen mit Wiederholung mit beschränkten unteren Stellenzahlen durch dieselben Verbindungen dargestellt werden, welche keinen Beschränkungen unterworfen sind. Wir ziehen aus der Gleichung 199 die folgende.

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right) = A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right)$$
$$-A\left([(1)^{(1)}\,f\,(s)\,(s)\right)\ .\ A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-s)\ (1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$-A\left([(1,1)^{(2)}\,f\,(2s)(s)\right)\ .\ A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f\,(m-2s)\,(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$-\ .$$

Nach diesem Gesetze bilden wir mehrere Gleichungen, aus deren Vereinigung wir erhalten

Digitized by Google

$$A\left([(1)^{(1)}f(s)(s)\right).A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-s)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)=$$
$$=A\left([(1)^{(1)}f(s)(s)\right).A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-s)\right)$$
$$-2.A\left([(1,1)^{(2)}f(2s)(s)\right).A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2s)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$-3.A\left([(1,1,1)^{(3)}f(3s)(s)\right).A\left([[1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-3)}f(m-3s)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$-\ .$$

Die Verbindung von dieser Gleichung mit der vorhergehenden gibt uns

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)=A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right)$$
$$-A\left([(1)^{(1)}f(s)(s)\right).A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-s)\right)$$
$$+1.A\left([(1,1)^{(2)}f(2s)(s)\right).A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2s)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$+2.A\left([(1,1,1)^{(3)}f(3s)(s)\right).A\left([[1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-3)}f(m-3s)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$+\ .$$

Wird auf gleiche Weise das dritte Glied dieser Gleichung entfernt, so entsteht

$$A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)=A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right)$$
$$-A\left([(1)^{(1)}f(s)(s)\right).A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-s)\right)$$
$$+A\left([(1,1)^{(2)}f(2s)(s)\right).A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2s)\right)$$
$$-1.A\left([(1,1,1)^{(3)}f(3s)(s)\right).A\left([[1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-3)}f(m-3s)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$-3.A\left([(1,1,1,1)^{(4)}f(4s)(s)\right).A\left([[1,1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-4)}f(m-4s)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)$$
$$-\ .$$

Ganz allgemein erhält man

$$203)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)(1,2,..s-1,s+1,..)\right)=A\left([1,2,3,..n]^{(p)}f(m)\right)$$
$$-A\left([(1)^{(1)}f(s)(s)\right).A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}f(m-s)\right)$$
$$+A\left([(1,1)^{(2)}f(2s)(s)\right).A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2s)\right)$$
$$-A\left([(1,1,1)^{(3)}f(3s)(s)\right).A\left([[1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-3)}f(m-3s)\right)$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Digitized by Google

Im Falle, wo die oberen Stellenzahlen gleich werden, erhalten wir hieraus wieder die Gleichung 90, ist alsdann noch $s = 1$, die Gleichung 91.

Der Gang der Untersuchung zeigt sich hier derselbe, wie in §. 10, wir führen desswegen bloss das Resultat an, zu welchem wir gelangen.

Sind alle unteren Stellenzahlen $s, s+1, .. s+q-1$ ausgeschlossen, so ist

$$204)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\,(i,2,..s-1,s+q,..)\right) = A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f(m)\right)$$
$$- A\left[(1)^{(1)}f(s|s+q-1)\,(s,s+1,..s+q-1)\right).A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-s\,|\,m-s-q+1)\right)$$
$$+ A\left[(1,1)^{(2)}f(2s|2s+2q-2)\,(s,s+1,..s+q-1)\right).A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2s|m-2s-2q+2)\right)$$
$$- A\left[(1,1,1)^{(3)}f(3s|3s+3q-3)\,(s,s+1,..s+q-1)\right).A\left([[1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-3)}f(m-3s|m-3s-3q+3)\right)$$
$$+ \quad .$$

Fehlen die höchsten Elemente von s an, dieses eingeschlossen, so wird hieraus

$$205)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\,(1,2,3,..s-1)\right) = A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right)$$
$$- A\left[(1)^{(1)}\,f\,(s|m-p+1)\,(s,s+1,..)\right)\;.A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-s|p-1)\right)$$
$$+ A\left[(1,1)^{(2)}\,f\,(2s|m-p+2)\,(s,s+1,..)\right)\;.A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}\,f\,(m-2s|p-2)\right)$$
$$- A\left[(1,1,1)^{(3)}\,f\,(3s|m-p+3)\,(s,s+1,..)\right).A\left([[1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-3)}\,f\,(m-3s|p-3)\right)$$
$$+ \quad .$$

Ist aber in 204 $s = 1$ und $q = s$, so ist

$$206)\quad A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\,(s+1,s+2,..)\right) = A\left([1,2,3,..n]^{(p)}\,f\,(m)\right)$$
$$- A\left[(1)^{(1)}\,f\,(1\,|\,s)\,(1,2,..s)\right)\quad .A\left([[1,1,2,3,..n]^{(p-1)}\,f\,(m-1\,|\,m-s)\right)$$
$$+ A\left[(1,1)^{(2)}\,f\,(2\,|\,2s)\,(1,2,..s)\right)\quad .A\left([[1,1,1,2,3,..n]^{(p-2)}f(m-2\,|\,m-2s)\right)$$
$$- A\left[(1,1,1)^{(3)}\,f\,(3\,|\,3s)\,(1,2,..s)\right).A\left([[1,1,1,1,2,3,..n]^{(p-3)}f(m-3|m-3s)\right)$$
$$+ \quad .$$

Lassen wir in den drei letzten Gleichungen die oberen Stellenzahlen gleich werden, so entstehen aus ihnen wieder die Gesetze 93, 97, 98.

Digitized by Google

ANHANG.

Ueber die Werthe der Verbindungen zu bestimmten Summen, wenn die Fakultäten $1^{k|1}$, $2^{k|1}$, $3^{k|1}$,.. die Elemente sind, aus welchen die Verbindungen gebildet werden.

§. 23.

Es sey $A_0 = 1$, $A_1 = 2$, $A_2 = 3$, u. s. w., so ist

$$\left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(1)} = m$$

daher nach 21

$$207) \quad \left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(2)} = (m-1)\cdot 1 + (m-2)\cdot 2 + (m-3)\cdot 3 + \ldots + 1\cdot(m-1) = \frac{(m-1)^{2|1}}{1^{2|1}}$$

Setzen wir nun in 21 $p = 3$ und berücksichtigen die vorstehende Gleichung, so wird

$$\left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(3)} = 1\cdot\frac{(m-2)^{3|1}}{1^{3|1}} + 2\cdot\frac{(m-3)^{3|1}}{1^{3|1}} + 3\cdot\frac{(m-4)^{3|1}}{1^{3|1}} + \ldots + (m-2)\cdot\frac{1^{3|1}}{1^{3|1}}$$

Digitized by Google

Summirt man diese Reihe, so entsteht

208) $$\left(\int(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(2)} = \frac{(m-2)^{\underline{2}}}{1^{\underline{2}}}$$

Auf diese Weise gelangt man zuletzt zur Gleichung.

209) $$\left(\int(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(p)} = \frac{(m-p+1)^{\underline{p-1}}}{1^{\underline{p-1}}}$$

Ist z. B. $m = 7$ und $p = 4$, so ist

$$\left(\int(7)\,(1,2,3,..)\right)^{(4)} = 1.1.1.4 = 120$$

1.1.2.3
1.1.3.2
1.1.4.1
1.2.1.3
1.2.2.2
1.2.3.1
1.3.1.2
1.3.2.1
1.4.1.1
2.1.1.3
2.1.2.2
2.1.3.1
2.2.1.2
2.2.2.1
2.3.1.1
3.1.1.2
3.1.2.1
3.2.1.1
4.1.1.1

Nach 209 ist aber auch

$$\left(\int(7)\,(1,2,3,..)\right)^{(4)} = \frac{(7-4+1)^{\underline{4-1}}}{1^{\underline{4-1}}} = \frac{4^{\underline{3}}}{1^{\underline{3}}} = \frac{4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7}$$

$$= 4.3.10 = 120$$

Digitized by Google

§. 24.

Ist $A_1 = \frac{1^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}$, $A_2 = \frac{2^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}$, $A_3 = \frac{3^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}$, u. s. w., so ist

210) $$\left(f(m)\left(\frac{1^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, \frac{2^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, \frac{3^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, ..\right)\right)^{(\alpha)} = \frac{m^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}$$

und nach 21

211) $$\left(f(m)\left(\frac{1^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, \frac{2^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, \frac{3^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, ..\right)\right)^{(\alpha)} = \frac{(m-1)^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}} \cdot \frac{1^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}} = \frac{(m-1)^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}$$

$$+ \frac{(m-2)^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}} \cdot \frac{2^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}$$

$$+ \frac{(m-3)^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}} \cdot \frac{3^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \frac{1^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}} \cdot \frac{(m-1)^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}$$

Durch eine abermalige Verbindung von 21 und 211 gelangt man zur Gleichung

212) $$\left(f(m)\left(\frac{1^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, \frac{2^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, \frac{3^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, ..\right)\right)^{(2)} = \frac{(m-2)^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}$$

Und ganz allgemein

213) $$\left(f(m)\left(\frac{1^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, \frac{2^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, \frac{3^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, ..\right)\right)^{(p)} = \frac{(m-p+1)^{\alpha p-\alpha|\alpha}}{1^{\alpha p-\alpha|\alpha}}$$

§. 25.

Der in den vorhergehenden §§. eingeschlagene Weg führt uns auf gleiche Art weiter. Es ist

214) $$\left(f(m)\left(\frac{1^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, \frac{2^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, \frac{3^{\alpha|\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}, ..\right)\right)^{(p)} = \frac{(m-p+1)^{4p-\alpha|\alpha}}{1^{4p-\alpha|\alpha}}$$

Digitized by Google

Und ganz allgemein

215) $\left(f(m)\left(\frac{1^{k|\cdot}}{1^{k|\cdot}}, \frac{2^{k|\cdot}}{1^{k|\cdot}}, \frac{3^{k|\cdot}}{1^{k|\cdot}}, ..\right)\right)^{(p)} = \frac{(m-p+1)^{kp+p-1|\cdot}}{1^{kp+p-1|\cdot}}$

§. 26.

Es sey $A_1 = a+1.h$, $A_2 = a+2.h$, $A_3 = a+3.h$, .. so ist

$$\left(f(m)\,(a+1.h, a+2.h, ..)\right)^{(s)} = (a+1.h)\,(a+(m-1)\,h)$$
$$(a+2.h)\,(a+(m-2)\,h)$$
$$(a+3.h)\,(a+(m-3)\,h)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(a+(m-1)\,h)\,(a+1.h)$$
$$= a^2 + 1.a.h + (m-1)\,a.h + 1.(m-1).h^2$$
$$a^2 + 2.a.h + (m-2)\,a.h + 2.(m-2).h^2$$
$$a^2 + 3.a.h + (m-3)\,a.h + 3.(m-3).h^2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a^2 + (m-1)\,a.h + 1.a.h + (m-1).1.h^2$$

daher

216) $\left(f(m)\,(a+1.h, a+2.h, ..)\right)^{(s)} =$

$$= \frac{(m-1)^{s+1|\cdot}}{1^{s+1|\cdot}}\,a^s + \frac{2^{s+1-1}}{1^{s+1|\cdot}} \cdot \frac{(m-1)^{s|\cdot}}{1^{s|\cdot}}\,a.h + \frac{2^{s+1-1}}{1^{s+1|\cdot}} \cdot \frac{(m-1)^{s-1|\cdot}}{1^{s-1|\cdot}} \cdot h^2$$

Für $p = s$ ist nun, nach 21

$$\left(f(m)\,(a+1.h, a+2.h, ..)\right)^{(s)} =$$
$$= \left(\frac{(m-2)^{s+1|\cdot}}{1^{s+1|\cdot}}\,a^s + \frac{2^{s+1-1}}{1^{s+1|\cdot}} \cdot \frac{(m-2)^{s|\cdot}}{1^{s|\cdot}}\,a.h + \frac{2^{s+1-1}}{1^{s+1|\cdot}} \cdot \frac{(m-2)^{s-1|\cdot}}{1^{s-1|\cdot}} \cdot h^2\right) \cdot (a+1.h)$$
$$+ \left(\frac{(m-3)^{s+1|\cdot}}{1^{s+1|\cdot}}\,a^s + \frac{2^{s+1-1}}{1^{s+1|\cdot}} \cdot \frac{(m-3)^{s|\cdot}}{1^{s|\cdot}}\,a.h + \frac{2^{s+1-1}}{1^{s+1|\cdot}} \cdot \frac{(m-3)^{s-1|\cdot}}{1^{s-1|\cdot}} \cdot h^2\right) \cdot (a+2.h)$$
$$+ \left(\frac{(m-4)^{s+1|\cdot}}{1^{s+1|\cdot}}\,a^s + \frac{2^{s+1-1}}{1^{s+1|\cdot}} \cdot \frac{(m-4)^{s|\cdot}}{1^{s|\cdot}}\,a.h + \frac{2^{s+1-1}}{1^{s+1|\cdot}} \cdot \frac{(m-4)^{s-1|\cdot}}{1^{s-1|\cdot}} \cdot h^2\right) \cdot (a+3.h)$$
$$+ \cdot\ \cdot$$
$$+ \left(\frac{1^{s+1|\cdot}}{1^{s+1|\cdot}}\,a^s + \frac{2^{s+1-1}}{1^{s+1|\cdot}} \cdot \frac{1^{s|\cdot}}{1^{s|\cdot}}\,a.h + \frac{2^{s+1-1}}{1^{s+1|\cdot}} \cdot \frac{1^{s-1|\cdot}}{1^{s-1|\cdot}} \cdot h^2\right) \cdot (a+(m-2)\,h)$$

Digitized by Google

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \ldots + \frac{(m-2)}{1}\right) \cdot a^2$$

$$+ \left((m-2)\cdot\frac{1}{1} + (m-3)\cdot\frac{2}{1} + (m-4)\cdot\frac{3}{1} + \ldots + 1\cdot\frac{m-2}{1}\right) \cdot a^1 . h$$

$$+ \left(\frac{1^{2|1}}{1^{2|1}} + \frac{2^{2|1}}{1^{2|1}} + \frac{3^{2|1}}{1^{2|1}} + \ldots + \frac{(m-2)^{2|1}}{1^{2|1}}\right) \cdot 2a^0 . h$$

$$+ \left((m-2)\cdot\frac{1^{2|1}}{1^{2|1}} + (m-3)\cdot\frac{2^{2|1}}{1^{2|1}} + (m-4)\cdot\frac{3^{2|1}}{1^{2|1}} + \ldots + 1\cdot\frac{(m-2)^{2|1}}{1^{2|1}}\right) \cdot 2a . h^1$$

$$+ \left(\frac{1^{2|1}}{1^{2|1}} + \frac{2^{2|1}}{1^{2|1}} + \frac{3^{2|1}}{1^{2|1}} + \ldots + \frac{(m-2)^{2|1}}{1^{2|1}}\right) \cdot a^0 . h^2$$

$$+ \left((m-2)\cdot\frac{1^{2|1}}{1^{2|1}} + (m-3)\cdot\frac{2^{2|1}}{1^{2|1}} + (m-4)\cdot\frac{3^{2|1}}{1^{2|1}} + \ldots + 1\cdot\frac{(m-2)^{2|1}}{1^{2|1}}\right) \cdot h^2$$

Werden diese Reihen summirt, so erhält man

217) $$\left(\int(m)\ (a+1.h,\ a+2.h,..)\right)^{(2)} =$$

$$= \frac{3^{0|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-2)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot a^3 + \frac{3^{1|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-2)^{3|1}}{1^{2|1}} \cdot a^2 h^1 + \frac{3^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-2)^{4|1}}{1^{4|1}} \cdot a^1 h^2 + \frac{3^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{(m-2)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot h^3$$

Und ganz allgemein ist

218) $$\left(\int(m)\ (a+h,\ a+2.h,..)\right)^{(p)} = \frac{p^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{p-1|1}}{1^{p-1|1}} \cdot a^p . h^0$$

$$+ \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{p|1}}{1^{p,1}} \cdot a^{p-1} . h^1$$

$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{p+1|1}}{1^{p+1|1}} \cdot a^{p-2} . h^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{2p-1|1}}{1^{2p-1|1}} \cdot a^0 . h^p$$

Digitized by Google

§. 27.

Setzen wir in 218 $a = s$ und $h = 1$, so wird

$$219)\quad \left(f(m)\,(s+1, s+2, s+3, ..)\right)^{(p)} = \frac{p^{\underline{p}\,|\,-\,1}}{1^{\underline{p}\,|\,1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{\underline{p-1}\,|\,1}}{1^{\underline{p-1}\,|\,1}} \cdot s^p$$
$$+ \frac{p^{\underline{p-1}\,|\,-\,1}}{1^{\underline{p-1}\,|\,1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{\underline{p}\,|\,1}}{1^{\underline{p}\,|\,1}} \cdot s^{p-1}$$
$$+ \frac{p^{\underline{p-1}\,|\,-\,1}}{1^{\underline{p-1}\,|\,1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{\underline{p+1}\,|\,1}}{1^{\underline{p+1}\,|\,1}} \cdot s^{p-2}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \frac{p^{\underline{2p-1}\,|\,-\,1}}{1^{\underline{2p}\,|\,1}} \cdot \frac{(m-p+1)^{\underline{2p-1}\,|\,1}}{1^{\underline{2p-1}\,|\,1}} \cdot s^0$$

Der vorstehende Ausdruck ist von dem in 98 verschieden. Hier zählen wir bei der Bildung der Summe die Elemente $s+1, s+2, s+3, ..$ als 1tes, 2tes, 3tes,.. und dort nach ihrem wahren Werthe als $s+1$tes, $s+2$tes, $s+3$tes ... Um nun 219 mit 98 gleichbedeutend zu machen, setzen wir auf der rechten Seite $m = m-ps$, so ist

$$220)\quad \left(f(m)\,(s+1, s+2, s+3, ..)\right)^{(p)} = \frac{p^{\underline{p}\,|\,-\,1}}{1^{\underline{p}\,|\,1}} \cdot \frac{(m-ps-p+1)^{\underline{p-1}\,|\,1}}{1^{\underline{p-1}\,|\,1}} \cdot s^p$$
$$+ \frac{p^{\underline{p-1}\,|\,-\,1}}{1^{\underline{p-1}\,|\,1}} \cdot \frac{(m-ps-p+1)^{\underline{p}\,|\,1}}{1^{\underline{p}\,|\,1}} \cdot s^{p-1}$$
$$+ \frac{p^{\underline{p-1}\,|\,-\,1}}{1^{\underline{p-1}\,|\,1}} \cdot \frac{(m-ps-p+1)^{\underline{p+1}\,|\,1}}{1^{\underline{p+1}\,|\,1}} \cdot s^{p-2}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \frac{p^{\underline{2p-1}\,|\,-\,1}}{1^{\underline{2p}\,|\,1}} \cdot \frac{(m-ps-p+1)^{\underline{2p-1}\,|\,1}}{1^{\underline{2p-1}\,|\,1}} \cdot s^0$$

Es sey $s=3$, $m=19$, $p=4$, so ist

Digitized by Google

$$\left(f(19)\ (4,5,6,..)\right)^{(4)} = \frac{4.5.6}{1.2.3} \cdot 3^4$$

$$+ \frac{4}{1} \cdot \frac{4.5.6.7}{1.2.3.4} \cdot 3^3$$

$$+ \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5} \cdot 3^2$$

$$+ \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot \frac{4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6} \cdot 3^1$$

$$+ \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} \cdot \frac{4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7} \cdot 3^0$$

$$= 1620 + 3780 + 3024 + 1008 + 120$$

$$= 9552$$

Es ist aber auch

$$\left(f(19)\ (4,5,6,..)\right)^{(4)} = 4.4.4.7 \cdot \frac{1.2.3.4}{1.2.3.1} = 1792 = 9552$$

$$+ 4.4.5.6 \cdot \frac{1.2.3.4}{1.2.1.1} + 5760$$

$$+ 4.5.5.5 \cdot \frac{1.2.3.4}{1.1.2.3} + 2000$$

§. 28.

Die Gleichung 220 zeigt uns, wie die Werthe der Verbindungen zu bestimmten Summen gefunden werden können, wenn die ersten s Elemente ausgeschlossen sind. Nicht so leicht finden wir die Werthe solcher Verbindungen gebildet aus einer bestimmten, beschränkten Zahl Elemente.

Dürfen nur die ersten s Elemente vorkommen, und ist $s < m-p+1$, so verbinden wir 209 und 220 mit 97, indem wir zuvor in der letzten Gleichung $s = s+1$ setzen.

Digitized by Google

Wir erhalten

$$221)\quad \left(\int(m)(1,2,3,..s)\right)^{(p)} = \frac{P^{\alpha|-\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}.s^{\alpha}.M_{\alpha} - \frac{P^{\alpha|-\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}.s^{\alpha}.M_{1} + \frac{P^{\alpha|-\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}}.s^{\alpha}.M_{2} - ..$$

Die Vorzahl von s^k ist

$$222)\quad M_k = \frac{(p-k)^{\alpha|-\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}} \cdot \frac{(m-ks-p+1)^{\alpha p-k-\alpha|\alpha}}{1^{\alpha p-k-\alpha|\alpha}}$$
$$- \frac{(p-k)^{\alpha|-\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}} \cdot \frac{(m-ks-s-p+1)^{\alpha p-k-\alpha|\alpha}}{1^{\alpha p-k-\alpha|\alpha}}$$
$$+ \frac{(p-k)^{\alpha|-\alpha}}{1^{\alpha|\alpha}} \cdot \frac{(m-ks-2s-p+1)^{\alpha p-k-\alpha|\alpha}}{1^{\alpha p-k-\alpha|\alpha}}$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Sehr interessante, hierher gehörige Untersuchungen findet man in der dritten Abhandlung der Analysis von Schweins.

Digitized by Google

GESCHÄFTE

welche

DIE GEDOPPELTEN VERBINDUNGEN

mit oder ohne

Wiederholung zu bestimmten Summen

erzeugen.

Digitized by Google

Digitized by Google

GESCHÄFTE

welche

DIE GEDOPPELTEN VERBINDUNGEN

mit oder ohne

Wiederholung zu bestimmten Summen

erzeugen.

§. 29.

Wenn man ein Polynomium

$$P = A_0 + A_1 x' + A_2 x' + A_3 x' + \ldots$$

zu irgend einer Potenz erhebt, so entstehen Verbindungen der Elemente A, deren untere Stellenzahlen immer dieselben Summen geben, und welche man desswegen mit der Benennung **Verbindungen zu bestimmten Summen** belegt hat. Aus dem Vervielfachen oder Messen zweitheiliger, ungleicher Faktoren gehen die geordneten Verbindungen mit oder ohne Wiederholung hervor. Die gedoppelten Verbindungen, welche wir in den vorhergehenden Abhandlungen untersucht haben, verdanken gleichfalls diesen beiden Geschäften ihr Daseyn und sie umfassen und ersetzen die eben angeführten drei Verbindungsweisen.

Digitized by Google

Die Mathematiker haben sich bis jetzt nur fast ausschliesslich mit der Entwickelung der Potenzen von Polynomien beschäftiget, weil ihre Anwendung näher lag und mehr Nutzen zu gewähren schien. Grössere Allgemeinheit geben aber die Entwickelungen von Produkten oder Brüchen mehrtheiliger, ungleicher Faktoren, sie werfen auch ein helleres Licht auf die bekannten Gesetze der Potenzen von Polynomien, und lassen einen oft nicht geahnten Zusammenhang der verschiedensten Formen erkennen, durch sie erst wird deutlich, was früher oft nur dunkel gefühlt wurde.

Was wir im Nachfolgenden aus unsern vorhergehenden Untersuchungen gezogen haben, ist eine blosse Andeutung; der eigentliche Nutzen der gedoppelten Verbindungen zeigt sich erst in seinem wahren Lichte bei den Fakultäten und andern Untersuchungen, denen wir eine besondere Schrift widmen werden.

Es sey

223) $$(0,1,2,3,..)\ P_n = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}x^1 + A_2^{(n)}x^2 + A_3^{(n)}x^3 + \ldots$$

und

224) $$(0,1,2,..)P_{n'}\cdot(0,1,2,..)P_{n''}\cdot(0,1,2,..)P_{n'''}\ldots(0,1,2,..)P_n = (0,1,2,..)P(1,2,3,..n)$$

Kommen bei den unteren Stellenzahlen alle Zahlen $0,1,2,3,..$ vor, so ist ihre Angabe nicht nöthig, und wir kürzen die vorstehende Bezeichnung ab in

225) $$P_{n'}.P_{n''}.P_{n'''}\ldots.P_n = P\ (1,2,3,..n)$$

Auf gleiche Weise setzen wir

226) $$\frac{1}{(0,1,2,..)\,P_{n'}.(0,1,2,..)\,P_{n''}\ldots.(0,1,2,..)P_n} = (0,1,2,3,..)\ P\ [1,2,3,..n]$$

Und wenn die unteren Stellenzahlen keinen Beschränkungen unterworfen sind, abgekürzt wie oben.

227) $$\frac{1}{P_{n'}.P_{n''}.P_{n'''}\ldots.P_n} = P\ [1,2,3,..n]$$

Digitized by Google

Das Vervielfachen.

§. 30.

Wird das Polynomium

$$P_1 = A_0^{(1)} + A_1^{(1)}.x^1 + A_2^{(1)}.x^2 + A_3^{(1)}.x^3 + \ldots$$
$$= A_0^{(1)} \left(1 + \frac{A_1^{(1)}}{A_0^{(1)}}.x^1 + \frac{A_2^{(1)}}{A_0^{(1)}}.x^2 + \frac{A_3^{(1)}}{A_0^{(1)}}.x^3 + \ldots\right)$$

mit dem Polynomium

$$P_2 = A_0^{(2)} + A_1^{(2)}.x^1 + A_2^{(2)}.x^2 + A_3^{(2)}.x^3 + \ldots$$
$$= A_0^{(2)} \left(1 + \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}}.x^1 + \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(2)}}.x^2 + \frac{A_3^{(2)}}{A_0^{(2)}}.x^3 + \ldots\right)$$

vervielfacht, so entsteht

$$P_1.P_2 = A_0^{(1)}.A_0^{(2)} \left(1 + \begin{vmatrix} \frac{A_1^{(1)}}{A_0^{(1)}} \\ \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}} \end{vmatrix} x^1 + \begin{vmatrix} \frac{A_2^{(1)}}{A_0^{(1)}} & \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(2)}} \\ \frac{A_1^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}} & \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} \frac{A_3^{(1)}}{A_0^{(1)}} & \frac{A_3^{(2)}}{A_0^{(2)}} \\ \frac{A_1^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(2)}} & \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}} \cdot \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(2)}} \\ \frac{A_2^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}} & \end{vmatrix} x^3 + \ldots \right)$$

Bei einem wiederholten Vervielfachen mit dem Polynomium

$$P_3 = A_0^{(3)} + A_1^{(3)}.x^1 + A_2^{(3)}.x^2 + A_3^{(3)}.x^3 + \ldots$$
$$= A_0^{(3)} \left(1 + \frac{A_1^{(3)}}{A_0^{(3)}}.x^1 + \frac{A_2^{(3)}}{A_0^{(3)}}.x^2 + \frac{A_3^{(3)}}{A_0^{(3)}}.x^3 + \ldots\right)$$

erhält man

Digitized by Google

$$P_1 . P_2 . P_3 = A_0^{(1)} . A_0^{(2)} . A_0^{(3)} \left(1 + \begin{vmatrix} \frac{A_1^{(1)}}{A_0^{(1)}} \\ \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}} \\ \frac{A_1^{(3)}}{A_0^{(3)}} \end{vmatrix} x^1 + \begin{vmatrix} \frac{A_2^{(1)}}{A_0^{(1)}} & \frac{A_1^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}} \\ \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(2)}} & \frac{A_1^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_1^{(3)}}{A_0^{(3)}} \\ \frac{A_2^{(3)}}{A_0^{(3)}} & \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}} \cdot \frac{A_1^{(3)}}{A_0^{(3)}} \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} \frac{A_3^{(1)}}{A_0^{(1)}} & \frac{A_2^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}} & \frac{A_1^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(2)}} \\ \frac{A_3^{(2)}}{A_0^{(2)}} & \frac{A_2^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_1^{(3)}}{A_0^{(3)}} & \frac{A_1^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_2^{(3)}}{A_0^{(3)}} \\ \frac{A_3^{(3)}}{A_0^{(3)}} & \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(2)}} \cdot \frac{A_1^{(3)}}{A_0^{(3)}} & \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}} \cdot \frac{A_2^{(3)}}{A_0^{(3)}} \\ & \frac{A_3^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_1^{(2)}}{A_0^{(2)}} & \frac{A_2^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(2)}} \\ & \frac{A_3^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_1^{(3)}}{A_0^{(3)}} & \frac{A_2^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_2^{(3)}}{A_0^{(3)}} \\ & \frac{A_3^{(2)}}{A_0^{(2)}} \cdot \frac{A_1^{(3)}}{A_0^{(3)}} & \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(2)}} \cdot \frac{A_2^{(3)}}{A_0^{(3)}} \\ & & \frac{A_3^{(1)}}{A_0^{(1)}} \cdot \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(2)}} \cdot \frac{A_1^{(3)}}{A_0^{(3)}} \end{vmatrix} x^3 + \cdots \right)$$

Neue Faktoren erzeugen neue Verbindungen, die alle demselben Gesetze huldigen. Die Vorzahlen bestehen aus gedoppelten Verbindungen ohne Wiederholung zu bestimmten Summen.

Ist nun

$$228) \quad P(1,2,3,..n) = P(1,2,3,..n) f_1 . x^0 + P(1,2,3,..n) f_2 . x^1 + P(1,2,3,..n) f_3 . x^2 + \ldots + P(1,2,3,..n) f(m+1) . x^m + \ldots$$

so ist

Digitized by Google

$$229)\quad \mathrm{P}\,(1,2,3,..n)\,\mathfrak{f}(m+1) = A_o^{(1)}.A_o^{(2)}...A_o^{(n)}\Big(\ \frac{A}{A_o}\big((1,2,3,..n)^{(o)}\,f(m)\big) + \frac{A}{A_o}\big((1,2,3,..n)^{(1)}\,f(m)\big) + \frac{A}{A_o}\big((1,2,3,..n)^{(2)}\,f(m)\big) + .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ + \frac{A}{A_o}\big((1,2,3,..n)^{(m)}\,f(m)\big)\ \Big)$$

Ist hierin $m > n$, so bricht die Reihe mit dem Gliede

$$\frac{A}{A_o}\big((1,2,3,..n)^{(n)}\,f(m)\big)$$

ab. Fangen die Polynomien nicht mit A_o, sondern mit A_s an, so ist

$$230)\quad (s, s+1,..)\,\mathrm{P}\,(1,2,3,..n)\,\mathfrak{f}\,(m+1) = = A_s^{(1)}.A_s^{(2)}...A_s^{(n)}\Big(\ \frac{A}{A_s}\big((1,2,3,..n)^{(o)}\,f\,(m)\,(s+1,s+2,..)\big) + \frac{A}{A_s}\big((1,2,3,..n)^{(1)}\,f\,(m+s)\,(s+1,s+2,..)\big) + \frac{A}{A_s}\big((1,2,3,..n)^{(2)}\,f\,(m+2s)\,(s+1,s+2,..)\big) + .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ + \frac{A}{A_s}\big((1,2,3,..n)^{(m)}\,f(m+ms)\,(s+1,s+2,..)\big)\ \Big)$$

Ist auch hierin $A_o = o$, so verschwindet der ganze Ausdruck, so lange $m < n$; wenn aber $m = n$, dann ist

$$231)\quad (s+1,s+2,..)\,\mathrm{P}\,(1,2,3,..n)\,\mathfrak{f}\,(m+1) = = A\,\big((1,2,3,..n)^{(n)}\,f\,(m+ns+n)\,(s+1,s+2,..)\big)$$

Und wenn $s = o$ ist

$$232)\quad (1,2,3,..)\,\mathrm{P}\,(1,2,3,..n)\,\mathfrak{f}\,(m+1) = A\,\big((1,2,3,..n)^{(n)}\,f\,(m+n)\,(1,2,3,..)\big)$$

Digitized by Google

Wir gehen zu den Potenzen über, indem wir die oberen Stellenzahlen gleich werden lassen; für diesen Fall erhalten wir aus 229

$$233) \quad P^n f(m+1) = \frac{n^{\underline{1}|-s}}{1^{\underline{1}|s}} \cdot A \left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(1)} \cdot A_s^{n-s}$$
$$+ \frac{n^{\underline{2}|-s}}{1^{\underline{2}|s}} \cdot A \left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(2)} \cdot A_s^{n-s}$$
$$+ \frac{n^{\underline{3}|-s}}{1^{\underline{3}|s}} \cdot A \left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(3)} \cdot A_s^{n-s}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \frac{n^{\underline{m}|-s}}{1^{\underline{m}|s}} \cdot A \left(f(m)(1,2,3,..)\right)^{(m)} \cdot A_s^{n-m}$$

Wenn nämlich die oberen Stellenzahlen gleich werden, so entsteht jede Verbindung der unteren Stellenzahlen so oft, als geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zu einer bestimmten Zahl von Elementen gemacht werden können.

Die Anzahl der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zu 1 Element ist nun . . . . . $= \frac{n^{\underline{1}|-s}}{1^{\underline{1}|s}}$

die Anzahl der geordn. Verbind. ohne Wiederh. zu 2 Elem. ist $= \frac{n^{\underline{2}|-s}}{1^{\underline{2}|s}}$

die Anzahl der geordn. Verbind. ohne Wiederh. zu 3 Elem. ist $= \frac{n^{\underline{3}|-s}}{1^{\underline{3}|s}}$

. . . . . .

Aus 230 wird

$$234) \quad (s, s+1, ..) \; P^n f(m+1) = \frac{n^{\underline{1}|-s}}{1^{\underline{1}|s}} \cdot A \left(f(m+s)(s+1, s+2, ..)\right)^{(1)} \cdot A_s^{n-s}$$
$$+ \frac{n^{\underline{2}|-s}}{1^{\underline{2}|s}} \cdot A \left(f(m+2s)(s+1, s+2, ..)\right)^{(2)} \cdot A_s^{n-s}$$
$$+ \frac{n^{\underline{3}|-s}}{1^{\underline{3}|s}} \cdot A \left(f(m+3s)(s+1, s+2, ..)\right)^{(3)} \cdot A_s^{n-s}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \frac{n^{\underline{m}|-s}}{1^{\underline{m}|s}} \cdot A \left(f(m+ms)(s+1, s+2, ..)\right)^{(m)} \cdot A_s^{n-m}$$

Digitized by Google

Aus 231 erhält man

235) $(s+1, s+2, ..)\ P^n f(m+1) = A\left(f(m+ns+n)(s+1, s+2, ..)\right)^{(n)}$

Und aus 232

236) $(1, 2, 3, ..)\ P^n f(m+1) = A\left(f(m+n)(1, 2, 3, ..)\right)^{(n)}$

Die Gleichung 233 gibt uns die bekannte unabhängige Bildungsweise der ganzen bejahten Potenzen irgend eines Polynomiums, sie ist ein besonderer Fall von 229, so die Gleichung 234; diese führt, wenn $s = 1$, zur Gleichung 7 der Analysis.

Wir gehen nun zu andern speciellen Fällen über, und nehmen an, es sollen alle Elemente, deren untere Stellenzahl grösser als 1 ist, verschwinden. Aus dem Polynomium wird in diesem Falle ein Binomium, welches wir mit B bezeichnen. In 229 bleibt jetzt von allen Gliedern bloss das letzte stehen und es ist

237) $B(1, 2, 3, .. n) f(m+1) = A_o^{(1)} . A_o^{(2)} ... A_o^{(n)} . \left(\frac{A_1}{A_o}\right)(1, 2, 3, .. n)^{(m)}$

Die vollständige Entwickelung des Binomiums aber ist

238) $$B(1, 2, 3, .. n) = A_o^{(1)} . A_o^{(2)} ... A_o^{(n)} . \left(1 + \left(\frac{A_1}{A_o}\right)(1, 2, 3, .. n)^{(1)} . x^1 + \left(\frac{A_1}{A_o}\right)(1, 2, 3, .. n)^{(2)} . x^2 + \left(\frac{A_1}{A_o}\right)(1, 2, 3, .. n)^{(3)} . x^3 + ... + \left(\frac{A_1}{A_o}\right)(1, 2, 3, .. n)^{(n)} . x^n\right)$$

Setzen wir in dieser Gleichung

$$A_o^{(1)} = A_o^{(2)} = A_o^{(3)} = ... = A_o^{(n)} = a$$

und $A_1^{(1)} = 0,\ A_1^{(2)} = 1,\ A_1^{(3)} = 2, ... A_1^{(n)} = n-1$

und $x = h$,

so wird

Digitized by Google

239) $$a^{n|h} = (1,2,3,..n-1)^{(0)} \cdot a^n \cdot h^0 + (1,2,3,..n-1)^{(1)} \cdot a^{n-1} \cdot h^1 + (1,2,3,..n-1)^{(2)} \cdot a^{n-2} \cdot h^2 + \ldots + (1,2,3,..n-1)^{(n-1)} \cdot a^1 \cdot h^{n-1}$$

Werden aber die A_0 unter sich gleich und gleich a, eben so die A_1 und $= b$, so wird

240) $$(a+bx)^n = a^n + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 \cdot x^1 + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 \cdot x^2 + \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 \cdot x^3 + \ldots + \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot a^0 \cdot b^n \cdot x^n$$

Digitized by Google

Allgemeine Gesetze des Produktes P (1, 2, 3, .. n)

§. 31.

Die früheren Untersuchungen über die gedoppelten Verbindungen setzen uns in den Stand, mit Leichtigkeit die Gesetze von P (1, 2, 3, .. n) aufzufinden. Verbinden wir die Gleichung 229 mit 11 dadurch, dass wir 11 mit $A_{\circ}^{(\circ)} . A_{\circ}^{(\circ)} . A_{\circ}^{(\circ)}$ vervielfachen und dann $p = 0, 1, 2, 3, .. m$ setzen und die Gleichungen, welche hierdurch entstehen, durch Zuzählen vereinigen, so wird

241) $$P\ (1,2,3,..n)\ f\,(m+1) = A_{\circ}^{(\circ)} \cdot P\ (1,2,..s-1,s+1,..n)\ f\,(m+1) + A_{\circ}^{(\circ)} \cdot P\ (1,2,..s-1,s+1,..n)\ f\,m + A_{\circ}^{(\circ)} \cdot P\ (1,2,..s-1,s+1,..n)\ f\,(m-1) + \ldots + A_{m}^{(\circ)} \cdot P\ (1,2,..s-1,s+1,..n)\ f\,1$$

Wir gehen von dieser Gleichung zu No. 8 der Analysis über, wenn wir die oberen Stellenzahlen gleich werden lassen; hierdurch wird

242) $$P^{n}\ f\,(m+1) = A_{\circ} . P^{n-1}\ f\,(m+1) + A_{1} . P^{n-1}\ f\,m + A_{2} . P^{n-1}\ f\,(m-1) + \ldots + A_{m} . P^{n-1}\ f\,1$$

Auf gleiche Weise wie 11 benutzen wir die Gleichungen 69 und 60 und ziehen aus ihnen folgende Gesetze:

243) $$n . P\ (1,2,3,..n)\ f\,(m+1) = A_{\circ|m}^{(\circ)} . P\ (2,3,4,..n)\ f\,(m+1|1) + A_{\circ|m}^{(\circ)} . P\ (1,3,4,..n)\ f\,(m+1|1) + A_{\circ|m}^{(\circ)} . P\ (1,2,4,..n)\ f\,(m+1|1) + \ldots + A_{\circ|m}^{(n)} . P\ (1,2,3,..n-1)\ f\,(m+1|1)$$

Digitized by Google

Und

$$244)\quad m \cdot P(1,2,3,..n)\,f(m+1) = (1|m) \cdot A^{(1)}_{1|m} \cdot P(2,3,4,..n)\,f(m|1) + (1|m) \cdot A^{(2)}_{1|m} \cdot P(1,3,4,..n)\,f(m|1) + (1|m) \cdot A^{(3)}_{1|m} \cdot P(1,2,4,..n)\,f(m|1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (1|m) \cdot A^{(n)}_{1|m} \cdot P(1,2,3,..n-1)\,f(m|1)$$

Wird nun 243 mit α und 244 mit β vervielfacht, so erhalten wir aus beiden Gleichungen die nachstehende.

$$245)\quad (\alpha n+\beta m)\,P(1,2,3,..n)\,f(m+1) = = (\alpha + (0|m)\beta) \cdot A^{(1)}_{0|m} \cdot P(2,3,4,..n)\,f(m+1|1) + (\alpha + (0|m)\beta) \cdot A^{(2)}_{0|m} \cdot P(1,3,4,..n)\,f(m+1|1) + (\alpha + (0|m)\beta) \cdot A^{(3)}_{0|m} \cdot P(1,2,4,..n)\,f(m+1|1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (\alpha + (0|m)\beta) \cdot A^{(n)}_{0|m} \cdot P(1,2,3,..n-1)\,f(m+1|1)$$

Auch von dieser Gleichung gehen wir zu den Potenzen über, wenn wir die Unterschiede der oberen Stellenzahlen verschwinden lassen; in diesem Falle werden alle Horizontalreihen gleich. Da nun n Reihen vorhanden sind, so können wir durch n messen und erhalten

$$246)\quad \left(\alpha + \frac{m}{n}\beta\right) P^n f(m+1) = \alpha \cdot A_0 \cdot P^{n-1} f(m+1) + (\alpha+\beta) \cdot A_1 \cdot P^{n-1} f\,m + (\alpha+2\beta) \cdot A_2 \cdot P^{n-1} f(m-1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (\alpha+m\beta) \cdot A_m \cdot P^{n-1} f\,1$$

Diese Gleichung, welche hier nur für ein ganzes, bejahtes n bewiesen ist, fällt mit 36 der Analysis zusammen; unsere Gleichung 242 ist ein specieller Fall von ihr, und entsteht, wenn $\beta = 0$ und $\alpha = 1$ gesetzt wird.

Digitized by Google

§. 32.

Die Gleichung 242 haben wir in 246 zu einer grösseren Allgemeinheit gesteigert, dadurch, dass wir die Glieder mit den willkührlichen Grössen α und β verbunden haben. Es kann auch nach einer andern Seite eine Erweiterung dieser Gleichung statt finden. Wir benutzen unsere Gleichung 24 und ziehen aus ihr folgende:

247) $$\begin{aligned} P(1,2,3,..n)\,f(m+1) = \\ = P(s,s+1,..s+h-1)\,f_1 \,.\, P(1,2,..s-1,s+h,..n)\,f(m+1) \\ + P(s,s+1,..s+h-1)\,f_2 \,.\, P(1,2,..s-1,s+h,..n)\,f\,m \\ + P(s,s+1,..s+h-1)\,f_3 \,.\, P(1,2,..s-1,s+h,..n)\,f(m-1) \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ + P(s,s+1,..s+h-1)\,f(m+1) \,.\, P(1,2,..s-1,s+h,..n)\,f_1 \end{aligned}$$

Hier wird die Bildung eines Produktes aus n Faktoren auf die aus h und n−h zurückgebracht. Ist $s=1$, so ist

248) $$\begin{aligned} P(1,2,3,..n)\,f(m+1) = P(1,2,3,..h)\,f_1 \,.\, P(h+1,h+2,..n)\,f(m+1) \\ + P(1,2,3,..h)\,f_2 \,.\, P(h+1,h+2,..n)\,f\,m \\ + P(1,2,3,..h)\,f_3 \,.\, P(h+1,h+2,..n)\,f(m-1) \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ + P(1,2,3,..h)\,f(m+1) \,.\, P(h+1,h+2,..n)\,f_1 \end{aligned}$$

Wollen wir zu den Potenzen eines Polynomiums übergehen, so setzen wir die oberen Stellenzahlen einander gleich und erhalten

249) $$\begin{aligned} P^n\,f(m+1) = P^h\,f_1 \,.\, P^{n-h}\,f(m+1) \\ + P^h\,f_2 \,.\, P^{n-h}\,f\,m \\ + P^h\,f_3 \,.\, P^{n-h}\,f(m-1) \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ + P^h\,f(m+1) \,.\, P^{n-h}\,f_1 \end{aligned}$$

Digitized by Google

Der grösseren Deutlichkeit wegen ändern wir die Form dieser Gleichung und setzen $n = k+h$, so wird hieraus (No. 9 der Analysis)

250)
$$\begin{aligned} P^{k+h} f(m+1) &= P^k f_1 \,.\, P^k f(m+1) \\ &+ P^k f_2 \,.\, P^k f\, m \\ &+ P^k f_3 \,.\, P^k f(m-1) \\ &+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ &+ P^k f(m+1) \,.\, P^k f_1 \end{aligned}$$

Besteht demnach ein Exponent n aus zwei Theilen k und h, so kann die Entwickelung der n ten Potenz eines Polynomiums auf die Entwickelung der Theile zurückgebracht werden.

§. 33.

Ein anderes Gesetz leiten wir aus unserer Gleichung 32 ab, indem wir in ihr $p = 0, 1, 2, 3, .. m$ setzen und sie mit 229 verbinden, erhalten wir

251) $P\,(1,2,3,..n)\,f(m+1) =$

$$= A_o^{(s)} \cdot A_o^{(s+1)} \ldots A_o^{(s+h-1)} \cdot \frac{A}{A_o} \Big((s, s+1, .. s+h-2)^{(o)} f(o|m) \Big) \,.\, P\,(1,2,..s-1, s+h, ..n)\, f(m+1|1)$$

$$+ A_o^{(s)} \cdot A_o^{(s+1)} \ldots A_o^{(s+h)} \cdot \frac{A}{A_o} \Big((s, s+1, .. s+h-1)^{(1)} f(1|m) \Big) \,.\, P\,(1,2,..s-1, s+h+1, ..n)\, f(m|1)$$

$$+ A_o^{(s)} \cdot A_o^{(s+1)} \ldots A_o^{(s+h+1)} \cdot \frac{A}{A_o} \Big((s, s+1, .. s+h)^{(2)} f(2|m) \Big) \,.\, P\,(1,2,..s-1, s+h+2, ..n)\, f(m-1|1)$$

$$+ \;.$$

$$+ A_o^{(s)} \cdot A_o^{(s+1)} \ldots A_o^{(s+h+m-1)} \cdot \frac{A}{A_o} \Big((s, s+1, .. s+h+m-2)^{(m)} f(m|m) \Big) \,.\, P\,(1,2,..s-1, s+h+m, ..n)\, f(1|1)$$

Lassen wir die oberen Stellenzahlen gleich werden, so entsteht

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
P^n \mathfrak{f}(m+1) = A_0^h \Bigg(& \frac{h^{0|1}}{1^{0|1}} \cdot A\left(\mathfrak{f}(0|m)(1,2,3,..)\right)^{(0)} \cdot P^{n-h}\mathfrak{f}(m+1|1) \\
& + \frac{h^{1|1}}{1^{1|1}} \cdot A\left(\mathfrak{f}(1|m)(1,2,3,..)\right)^{(1)} \cdot P^{n-h-1}\mathfrak{f}(m|1) \\
& + \frac{h^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot A\left(\mathfrak{f}(2|m)(1,2,3,..)\right)^{(2)} \cdot P^{n-h-2}\mathfrak{f}(m-1|1) \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{h^{m|1}}{1^{m|1}} \cdot A\left(\mathfrak{f}(m|m)(1,2,3,..)\right)^{(m)} \cdot P^{n-h-m}\mathfrak{f}(1|1)\Bigg)
\end{aligned}
$$

Setzen wir aber $h = n-k$, also $n-h = k$, so wird

$$
\begin{aligned}
252)\quad P^n \mathfrak{f}(m+1) = A_0^{n-k} \Bigg(& \frac{(n-k)^{0|1}}{1^{0|1}} \cdot A\left(\mathfrak{f}(0|m)(1,2,3,..)\right)^{(0)} \cdot P^k \mathfrak{f}(m+1|1) \\
& + \frac{(n-k)^{1|1}}{1^{1|1}} \cdot A\left(\mathfrak{f}(1|m)(1,2,3,..)\right)^{(1)} \cdot P^{k-1}\mathfrak{f}(m|1) \\
& + \frac{(n-k)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot A\left(\mathfrak{f}(2|m)(1,2,3,..)\right)^{(2)} \cdot P^{k-2}\mathfrak{f}(m-1|1) \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{(n-k)^{m|1}}{1^{m|1}} \cdot A\left(\mathfrak{f}(m|m)(1,2,3,..)\right)^{(m)} \cdot P^{k-m}\mathfrak{f}(1|1)\Bigg)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung zeigt nun, wie die ganzen bejahten Potenzen eines Polynomiums auf andere ganze bejahte Potenzen desselben Polynomiums zurückgebracht werden können. Betrachten wir aber die Verbindungen, welche diese Gleichung enthält, als Glieder in der Entwickelung des verkürzten Polynomiums, so können wir dieselben nach 236 ersetzen und es wird

$$
\begin{aligned}
253)\quad P^n \mathfrak{f}(m+1) = A_0^{n-k} \Bigg(& \frac{(n-k)^{0|1}}{1^{0|1}} (1,2,3,..)\, P^0 \mathfrak{f}(1|m+1) \cdot P^k \mathfrak{f}(m+1|1) \\
& + \frac{(n-k)^{1|1}}{1^{1|1}} (1,2,3,..)\, P^1 \mathfrak{f}(1|m) \cdot P^{k-1}\mathfrak{f}(m|1) \\
& + \frac{(n-k)^{2|1}}{1^{2|1}} (1,2,3,..)\, P^2 \mathfrak{f}(1|m-1) \cdot P^{k-2}\mathfrak{f}(m-1|1) \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{(n-k)^{m|1}}{1^{m|1}} (1,2,3,..)\, P^m \mathfrak{f}(1|1) \cdot P^{k-m}\mathfrak{f}(1|1)\Bigg)
\end{aligned}
$$

In allen diesen Gleichungen kann jedoch k nie kleiner als m werden.

Digitized by Google

§. 34.

Aus der Gleichung 75 ziehen wir, indem wir wieder $p = 0, 1, 2, 3, .. m$ setzen und die Ausdrücke, welche hierdurch entstehen, mit $A_{\bullet}^{(0)}. A_{\bullet}^{(1)} ... A_{\bullet}^{(m)}$ verbinden, die folgende Gleichung:

$$254)\quad \left(\alpha + \frac{m.h}{n}\beta\right) . \frac{n^{\underline{h}|-1}}{1^{\underline{h}|1}} . P(1,2,3,..n)\, f(m+1) =$$

$$= \alpha . P((1,2,3,..h) f_1 . P((h+1, h+2, ..n) f(m+1)$$
$$+ \left(\alpha + 1.\beta\right) . P((1,2,3,..h) f_2 . P((h+1, h+2, ..n) f m$$
$$+ \left(\alpha + 2.\beta\right) . P((1,2,3,..h) f_3 . P((h+1, h+2, ..n) f(m-1)$$
$$+ . . . . . .$$
$$+ \left(\alpha + m.\beta\right) . P((1,2,3,..h) f(m+1) . P((h+1, h+2, ..n) f_1$$

Diese Gleichung ist sehr allgemein und umfasst viele der früheren; werden in ihr die oberen Stellenzahlen gleich, so entsteht jedes Glied so oft, als sich geordnete Verbindungen ohne Wiederholung aus n Elementen zu h Elementen machen lassen, also $\frac{n^{\underline{h}|-1}}{1^{\underline{h}|1}}$ mal; nimmt man diesen Faktor von beiden Seiten hinweg und setzt $n = h+k$, so erhält man

$$255)\quad \left(\alpha + \frac{m.h}{h+k}\beta\right) P^{h+1} f(m+1) = \alpha . P^h f_1 . P^1 f(m+1)$$
$$+ \left(\alpha + 1.\beta\right) . P^h f_2 . P^1 f m$$
$$+ \left(\alpha + 2.\beta\right) . P^h f_3 . P^1 f(m-1)$$
$$+ . . . . . .$$
$$+ \left(\alpha + m.\beta\right) . P^h f(m+1) . P^1 f_1$$

Diese Gleichung fällt mit 37 der Analysis zusammen, ist jedoch hier nur für ganze bejahte Potenzen bewiesen; sie ist eine allgemeinere Form von 250.

Digitized by Google

§. 35.

Die Untersuchungen der §§. 9 und 10 lassen eine ausgedehnte Anwendung zu. Da wir mit Gegenwärtigem nicht die Absicht hatten eine Theorie der Geschäfte, welche unsere gedoppelten Verbindungen erzeugen, sondern bloss einige Andeutungen über ihre Anwendung geben zu wollen, so begnügen wir uns dasjenige anzuführen, was unmittelbar aus unsern früheren Gleichungen hergeleitet werden kann.

Aus 82 erhält man

$$
\begin{aligned}
256)\quad & P\,(1,2,3,..n)\,\mathfrak{k}(m+1) = (0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P\,(1,2,3,..n)\,\mathfrak{k}(m+1) \\
& + A\Big(((1)^{(1)}\,\mathfrak{f}\,(s|s+q-1)\,(s,s+1,..s+q-1)\Big)\,.\,(0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P\,((2,3,4,..n)\,\mathfrak{k}(m-s+1|m-s-q+2) \\
& + A\Big(((1,2)^{(2)}\,\mathfrak{f}\,(2s|2s+2q-2)\,(s,s+1,..s+q-1)\Big)\,.\,(0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P\,((3,4,5,..n)\,\mathfrak{k}(m-2s+1|m-2s-2q+3) \\
& + A\Big(((1,2,3)^{(3)}\,\mathfrak{f}\,(3s|3s+3q-3)\,(s,s+1,..s+q-1)\Big)\,.\,(0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P\,((4,5,6,..n)\,\mathfrak{k}(m-3s+1|m-3s-3q+4) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

oder, wenn alle höheren Elemente fehlen

$$
\begin{aligned}
257)\quad & P\,(1,2,3,..n)\,\mathfrak{k}(m+1) = (0,1,2,..s-1)\,P\,(1,2,3,..n)\,\mathfrak{k}(m+1) \\
& + A\Big(((1)^{(1)}\,\mathfrak{f}\,(s|m)\,(s,s+1,..)\Big)\,.\,(0,1,2,..s-1)\,P\,((2,3,4,..n)\,\mathfrak{k}(m-s+1|1) \\
& + A\Big(((1,2)^{(2)}\,\mathfrak{f}\,(2s|m)\,(s,s+1,..)\Big)\,.\,(0,1,2,..s-1)\,P\,((3,4,5,..n)\,\mathfrak{k}(m-2s+1|1) \\
& + A\Big(((1,2,3)^{(3)}\,\mathfrak{f}\,(3s|m)\,(s,s+1,..)\Big)\,.\,(0,1,2,..s-1)\,P\,((4,5,6,..n)\,\mathfrak{k}(m-3s+1|1) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Für die Potenzen erhält man

Digitized by Google

258) $\mathrm{P}^{n} f(m+1) = (0,1,2,..s-1,s+q,..)\ \mathrm{P}^{n} f(m+1)$

$$+ \frac{n^{s|-s}}{1^{s|s}} \cdot A\left(f(s|s+q-1)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(s)} \cdot (0,1,2,..s-1,s+q,..)\ \mathrm{P}^{n-s} f(m-s+1|m-s-q+2)$$

$$+ \frac{n^{s|-s}}{1^{s|s}} \cdot A\left(f(2s|2s+2q-2)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(s)} \cdot (0,1,2,..s-1,s+q,..)\ \mathrm{P}^{n-2s} f(m-2s+1|m-2s-2q+3)$$

$$+ \frac{n^{s|-s}}{1^{s|s}} \cdot A\left(f(3s|3s+3q-3)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(s)} \cdot (0,1,2,..s-1,s+q,..)\ \mathrm{P}^{n-3s} f(m-3s+1|m-3s-3q+4)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

259) $\mathrm{P}^{n} f(m+1) = (0,1,2,..s-1)\ \mathrm{P}^{n} f(m+1)$

$$+ \frac{n^{s|-s}}{1^{s|s}} \cdot A\left(f(s|m)(s,s+1,..)\right)^{(s)} \cdot (0,1,2,..s-1)\ \mathrm{P}^{n-s} f(m-s+1|1)$$

$$+ \frac{n^{s|-s}}{1^{s|s}} \cdot A\left(f(2s|m)(s,s+1,..)\right)^{(s)} \cdot (0,1,2,..s-1)\ \mathrm{P}^{n-2s} f(m-2s+1|1)$$

$$+ \frac{n^{s|-s}}{1^{s|s}} \cdot A\left(f(3s|m)(s,s+1,..)\right)^{(s)} \cdot (0,1,2,..s-1)\ \mathrm{P}^{n-3s} f(m-3s+1|1)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man in 256 $s=1$ und $q=s$, so wird

260) $\mathrm{P}\ (1,2,3,..n) f(m+1) = (0,s+1,s+2,..)\ \mathrm{P}\ (1,2,3,..n) f(m+1)$

$$+ A\left((1)^{(1)} f(1|s)\ (1,2,3,..s)\right) \cdot (0,s+1,s+2,..)\ \mathrm{P}\ ((2,3,4,..n) f(m|m-s+1)$$

$$+ A\left((1,2)^{(2)} f(2|2s)\ (1,2,3,..s)\right) \cdot (0,s+1,s+2,..)\ \mathrm{P}\ ((3,4,5,..n) f(m-1|m-2s+1)$$

$$+ A\left((1,2,3)^{(3)} f(3|3s)\ (1,2,3,..s)\right) \cdot (0,s+1,s+2,..)\ \mathrm{P}\ ((4,5,6,..n) f(m-2|m-3s+1)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

Hier haben wir $(0,1,2,3,..)\,P$ durch $(0,s+1,s+1,..)\,P$ dargestellt, es kann aber auch $(0,1,2,3,..)\,P$ durch $(s+1,s+2,..)\,P$ ausgedrückt werden; in die Reihe der Gleichungen, welche in dem letzten Falle entstehen, gehört 30 der Analysis, wo $s=0$ ist.

§. 36.

Die Auflösung der umgekehrten Aufgabe der vorhergehenden Untersuchung leiten wir aus §. 10 her. Aus 93 wird, wenn $p=0,1,2,3,..m$ gesetzt wird

$$261)\quad (0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P\,(1,2,3,..n)\,f\,(m+1) = P\,(1,2,3,..n)\,f\,(m+1)$$
$$-A\left(((1)^{(1)}\,f\,(s|s+q-1)(s,s+1,..s+q-1)\right).P((2,3,4,..n)\,f\,(m-s+1|m-s-q+2)$$
$$+A\left(((1,2)^{(1)}\,f\,(2s|2s+2q-2)(s,s+1,..s+q-1)\right).P((3,4,5,..n)\,f\,(m-2s+1|m-2s-2q+3)$$
$$-A\left(((1,2,3)^{(1)}\,f\,(3s|3s+3q-3)(s,s+1,..s+q-1)\right).P((4,5,6,..n)\,f\,(m-3s+1|m-3s-3q+4)$$
$$+\quad .$$

Werden hierin die oberen Stellenzahlen gleich, so ist für die Potenzen

$$262)\quad (0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P^n\,f\,(m+1) = P^n\,f\,(m+1)$$
$$-\frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}.A\left(f\,(s|s+q-1)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(1)}.P^{n-1}\,f\,(m-s+1|m-s-q+2)$$
$$+\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}.A\left(f\,(2s|2s+2q-2)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(2)}.P^{n-1}\,f\,(m-2s+1|m-2s-2q+3)$$
$$-\frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}.A\left(f\,(3s|3s+3q-3)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(3)}.P^{n-1}\,f\,(m-3s+1|m-3s-3q+4)$$
$$+\quad .$$

Fehlen alle höhern Stellenzahlen, so wird aus 261

Digitized by Google

263) $(0,1,2,..s-1)\ P(1,2,3,..n)\ f(m+1) = P(1,2,3,..n)\ f(m+1)$

$$- A\left(((1)^{(s)}\ f(s|m)\ (s,s+1,..)\right) \cdot P((2,3,4,..n)\ f\ (m-s+1|1)$$
$$+ A\left(((1,2)^{(s)}\ f(2s|m)\ (s,s+1,..)\right) \cdot P((3,4,5,..n)\ f(m-2s+1|1)$$
$$- A\left(((1,2,3)^{(s)}\ f(3s|m)\ (s,s+1,..)\right) \cdot P((4,5,6,..n)\ f(m-3s+1|1)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und aus 262

264) $(0,1,2,3,..s-1)\ P^n f(m+1) = P^n f(m+1)$

$$- \frac{n^{s|-s}}{1^{s|s}} \cdot A\left(f(s|m)\ (s,s+1,..)\right)^{(s)} \cdot P^{n-s} f(m-s+1|1)$$
$$+ \frac{n^{s|-s}}{1^{s|s}} \cdot A\left(f(2s|m)\ (s,s+1,..)\right)^{(s)} \cdot P^{n-s} f(m-2s+1|1)$$
$$- \frac{n^{s|-s}}{1^{s|s}} \cdot A\left(f(3s|m)\ (s,s+1,..)\right)^{(s)} \cdot P^{n-s} f(m-3s+1|1)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Verbindungen, welche die Vorzahlen begleiten, kann man als Glieder in der Entwickelung von Polynomien betrachten und nach 236 ersetzen.

Digitized by Google

Das Messen.

§. 37.

Wird die Einheit durch das Polynomium

$$P_{\cdot} = A_{\cdot}^{(\cdot)} + A_{\cdot}^{(\cdot)}.x^{\cdot} + A_{\cdot}^{(\cdot)}.x^{\cdot} + A_{\cdot}^{(\cdot)}.x^{\cdot} + \ldots$$
$$= A_{\cdot}^{(\cdot)}\left(1 + \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}}.x^{\cdot} + \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}}.x^{\cdot} + \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}}.x^{\cdot} + \ldots\right)$$

gemessen, so entsteht

$$\frac{1}{P_{\cdot}} = \frac{1}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} \cdot \left(1 - \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}}x^{\cdot} - \begin{vmatrix} \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} & x^{\cdot} \\ \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} & \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} & \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} & x^{\cdot} \\ \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} & \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} & \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} \\ \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} & \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} & \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}} \end{vmatrix} x^{\cdot} - \ldots\right)$$

Messen wir von Neuem durch das Polynomium

$$P_{\cdot} = A_{\cdot}^{(\cdot)} + A_{\cdot}^{(\cdot)}.x^{\cdot} + A_{\cdot}^{(\cdot)}.x^{\cdot} + A_{\cdot}^{(\cdot)}.x^{\cdot} + \ldots$$
$$= A_{\cdot}^{(\cdot)}\left(1 + \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}}.x^{\cdot} + \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}}.x^{\cdot} + \frac{A_{\cdot}^{(\cdot)}}{A_{\cdot}^{(\cdot)}}.x^{\cdot} + \ldots\right)$$

so wird

Digitized by Google

$$\frac{1}{P_{\cdot}.P_{\cdot}} = \frac{1}{A_{\bullet}^{(\circ)}.A_{\bullet}^{(\circ)}} \cdot \left(1 - \frac{A_{1}^{(\circ)}}{A_{\bullet}^{(\circ)}} x^{1} - \frac{A_{2}^{(\circ)}}{A_{\bullet}^{(\circ)}} x^{2} - \frac{A_{3}^{(\circ)}}{A_{\bullet}^{(\circ)}} x^{3} - \ldots\right)$$

$$\left. \begin{array}{rrrr

$$265) \quad P\,[1,2,3,..n] = P\,[1,2,3,..n]\,f1 \,.\, x^0 + P\,[1,2,3,..n]\,f2 \,.\, x^1 + P\,[1,2,3,..n]\,f3 \,.\, x^2 + \ldots\ldots\ldots + P\,[1,2,3,..n]\,f(m+1) \,.\, x^m + \ldots\ldots\ldots$$

und finden

$$266) \quad P\,[1,2,3,..,n]\,f(m+1) = \frac{1}{A_0^{(1)} \cdot A_0^{(2)} \ldots A_0^{(n)}} \left(\frac{A}{A_0}\left([1,2,3,..n]^{(0)} f(m)\right) - \frac{A}{A_0}\left([1,2,3,..n]^{(1)} f(m)\right) + \frac{A}{A_0}\left([1,2,3,..n]^{(2)} f(m)\right) - \ldots\ldots\ldots (-)^m \frac{A}{A_0}\left([1,2,3,..n]^{(m)} f(m)\right) \right)$$

Fangen die Polynomien nicht mit A_0 an, sondern ist die Folge der Elemente A_s, A_{s+1}, A_{s+2} ... so ist

$$267) \quad (s, s+1, s+2,..)\,P\,[1,2,3,..n]\,f(m+1) = \frac{1}{A_s^{(1)} \cdot A_s^{(2)} \ldots A_s^{(n)}} \left(\frac{A}{A_s}\left([1,2,3,..n]^{(0)} f(m)\,(s+1, s+2,..)\right) - \frac{A}{A_s}\left([1,2,3,..n]^{(1)} f(m+s)\,(s+1, s+2,..)\right) + \frac{A}{A_s}\left([1,2,3,..n]^{(2)} f(m+2s)\,(s+1, s+2,..)\right) - \ldots\ldots\ldots (-)^m \frac{A}{A_s}\left([1,2,3,..n]^{(m)} f(m+ms)\,(s+1, s+2,..)\right) \right)$$

Die Gleichung 266 enthält die unabhängige Bildungsweise unseres Bruches. Vergleichen wir sie mit der beim Vervielfachen, so erkennen wir Verschiedenheiten und Uebereinstimmung, wie sie nur auf

Digitized by Google

diesem Wege gewonnen werden können: die Verbindungen sind verschieden, die Elemente negativ, die Zusammensetzung, die Form der unabhängigen Bildungsweise dieselbe. Wir gehen zu speciellen Fällen über und setzen $A_{\circ}^{(\circ)} = A_{\circ}^{(1)} = A_{\circ}^{(2)} = \ldots = A_{\circ}^{(m)} = A$

Es wird in diesem Falle

$$268)\quad P\,[1,2,3,..n]\,f(m+1) = A\left([1,2,3,..n]^{(\circ)}\,f(m)\right)\,.\,A^{-n} - A\left([1,2,3,..n]^{(1)}\,f(m)\right)\,.\,A^{-n-1} + A\left([1,2,3,..n]^{(2)}\,f(m)\right)\,.\,A^{-n-2} - \ldots\ldots\ldots + (-)^m\,.\,A\left([1,2,3,..n]^{(m)}\,f(m)\right)\,.\,A^{-n-m}$$

Wir lassen jetzt alle oberen Stellenzahlen gleich werden und beachten, dass in diesem Falle eine jede Verbindung der unteren Stellenzahlen so oft vorkömmt, als sich, zu gleich viel Elementen, geordnete Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen bilden lassen.

Nun ist die Anzahl der geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zu 1 Element $= \frac{n^{\underline{1}|}}{1^{\underline{1}|}} = -\frac{(-n)^{\underline{1}|-1}}{1^{\underline{1}|}}$

. . . . . 2 Elementen $= \frac{n^{\underline{2}|}}{1^{\underline{2}|}} = +\frac{(-n)^{\underline{2}|-1}}{1^{\underline{2}|}}$

. . . . . 3 Elementen $= \frac{n^{\underline{3}|}}{1^{\underline{3}|}} = -\frac{(-n)^{\underline{3}|-1}}{1^{\underline{3}|}}$

. . . . . .

Daher, da jetzt aus $P\,[1,2,3,..n]$ die Potenz P^{-n} wird

$$269)\quad P^{-n}\,f(m+1) = \frac{(-n)^{\underline{1}|-1}}{1^{\underline{1}|}}\,.\,A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(1)}\,.\,A^{-n-1} + \frac{(-n)^{\underline{2}|-1}}{1^{\underline{2}|}}\,.\,A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(2)}\,.\,A^{-n-2} + \frac{(-n)^{\underline{3}|-1}}{1^{\underline{3}|}}\,.\,A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(3)}\,.\,A^{-n-3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(-n)^{\underline{m}|-1}}{1^{\underline{m}|}}\,.\,A\left(f(m)\,(1,2,3,..)\right)^{(m)}\,.\,A^{-n-m}$$

Digitized by Google

Dieser Ausdruck fällt mit der Gleichung 26 der Analysis zusammen, welche also nur ein specieller Fall unseres Gesetzes 266 ist. Er enthält die unabhängige Bildungsweise ganzer, verneinter Potenzen eines Polynomiums; wird 233 mit 269 verglichen, so finden wir die wichtige Wahrheit, dass, da beide Formen ganz identisch sind und nur + n und - n wechseln, dasselbe Gesetz für ein positives wie für ein negatives n und daher für ein jedes n überhaupt gilt, wie es auch beschaffen seyn mag. In dem besondern Falle der Gleichheit der oberen Stellenzahlen vereinigen sich die bis dahin verschiedenen Bildungen in eine einzige, welche in dieser Vereinigung nun auch die Gleichung 29 der Analysis enthält.

Wird aus dem Polynomium ein Binomium, oder verschwinden alle Glieder, deren untere Stellenzahl grösser als 1, so bleibt in 266 nur das letzte Glied stehen und es ist

$$270)\quad B\,[1,2,3,..n]\,f(m+1) = \frac{1}{A_{\circ}^{(1)}.A_{\circ}^{(2)}...A_{\circ}^{(n)}}\left(-\frac{A_{,}}{A_{\circ}}\right)[1,2,3,..n]^{(m)}$$

daher die Entwickelung des Binomiums

$$271)\quad B\,[1,2,3,..n] = \frac{1}{A_{\circ}^{(1)}.A_{\circ}^{(2)}...A_{\circ}^{(n)}}\left(1 + \left(-\frac{A_{,}}{A_{\circ}}\right)[1,2,3,..n]^{(1)}.x^{1}\right.$$
$$+ \left(-\frac{A_{,}}{A_{\circ}}\right)[1,2,3,..n]^{(2)}.x^{2}$$
$$+ \left(-\frac{A_{,}}{A_{\circ}}\right)[1,2,3,..n]^{(3)}.x^{3}$$
$$\left. + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\right)$$

Setzen wir ferner in der Entwickelung des Binomiums

$$A_{\circ}^{(1)} = A_{\circ}^{(2)} = A_{\circ}^{(3)} = \;.\;. = A_{\circ}^{(n)} = a$$
$$A_{,}^{(1)} = -1,\; A_{,}^{(2)} = -2,\; A_{,}^{(3)} = -3,\;...\;A_{,}^{(n)} = -n$$

und $x = h$,

so wird

Digitized by Google

$$272) \quad a^{-n|h} = a^{-n} + [1,2,3,..n]^{(1)} \cdot a^{-n-1} \cdot h^1 + [1,2,3,..n]^{(2)} \cdot a^{-n-2} \cdot h^2 + [1,2,3,..n]^{(3)} \cdot a^{-n-3} \cdot h^3 + \ldots$$

Setzen wir aber bloss die A_0 einander gleich und $= a$, so auch die A_1 und $= b$, so wird

$$273) \quad (a+bx)^{-n} = a^{-n} + \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot a^{-n-1} \cdot b^1 \cdot x^1 + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot a^{-n-2} \cdot b^2 \cdot x^2 + \frac{(-n)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot a^{-n-3} \cdot b^3 \cdot x^3 + \ldots$$

Digitized by Google

Allgemeine Gesetze des Bruches $P\,[1,2,3,..n]$

§. 38.

In der Gleichung 104 setzen wir $p = 0, 1, 2, 3, .. m$, messen durch $A_o^{(1)}.A_o^{(2)}...A_o^{(n)}$, vereinigen die Gleichungen, welche hierdurch entstehen, theils durch Zu- theils durch Abzählen und erhalten mit Rücksicht auf 266

274) $$P\,[1,2,..s-1,s+1,..n]\,f\,(m+1) = A_o^{(s)} \cdot P\,[1,2,3,..n]\,f\,(m+1) + A_1^{(s)} \cdot P\,[1,2,3,..n]\,f\,m + A_2^{(s)} \cdot P\,[1,2,3,..n]\,f\,(m-1) + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + A_m^{(s)} \cdot P\,[1,2,3,..n]\,f\,1$$

Diese Gleichung entspricht vollkommen der 241 des §. 31; lassen wir den Unterschied der oberen Stellenzahlen verschwinden, so erhalten wir, indem wir zuvor $n = n+1$ setzen,

275) $$P^{-s}f(m+1) = A_o.P^{-s-1}f(m+1) + A_1.P^{-s-1}fm + A_2.P^{-s-1}f(m-1) + + \cdot\cdot\cdot + A_m.P^{-s-1}f1$$

Dieselbe Form haben wir für ganze bejahte Potenzen gefunden. Die Gleichung 242 gilt daher ganz allgemein für jeden Exponenten.

So wie die Gleichung 246 ein specieller Fall von 242 ist, so ist auch die obige 275 ein besonderer Fall einer ähnlichen Gleichung, welche wir aus 183 und 189 herleiten.

Aus 183 erhalten wir

Digitized by Google

$$276)\quad -m\,.\,P[1,2,3,..n]\,f(m+1) = (1|m)\,.\,A^{(1)}_{1|m}\,.\,P[1,1,2,3,..n]\,f(m|1)$$
$$+ (1|m)\,.\,A^{(2)}_{1|m}\,.\,P[1,2,2,3,..n]\,f(m|1)$$
$$+ (1|m)\,.\,A^{(3)}_{1|m}\,.\,P[1,2,3,3,..n]\,f(m|1)$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+ (1|m)\,.\,A^{(n)}_{1|m}\,.\,P[1,2,3,..n,n]\,f(m|1)$$

Eben so erhalten wir aus 189

$$277)\quad n\,.\,P[1,2,3,..n]\,f(m+1) = A^{(1)}_{0|m}\,.\,P[1,1,2,3,..n]\,f(m+1|1)$$
$$+ A^{(2)}_{0|m}\,.\,P[1,2,2,3,..n]\,f(m+1|1)$$
$$+ A^{(3)}_{0|m}\,.\,P[1,2,3,3,..n]\,f(m+1|1)$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+ A^{(n)}_{0|m}\,.\,P[1,2,3,..n,n]\,f(m+1|1)$$

Wir vervielfachen 276 mit α und 277 mit β und verbinden beide durch Zuzählen, so wird

$$278)\quad (\alpha n - \beta m)\,P[1,2,3,..n]\,f(m+1) =$$
$$= (\alpha + (0|m)\beta)\,A^{(1)}_{0|m}\,.\,P[1,1,2,3,..n]\,f(m+1|1)$$
$$+ (\alpha + (0|m)\beta)\,A^{(2)}_{0|m}\,.\,P[1,2,2,2,..n]\,f(m+1|1)$$
$$+ (\alpha + (0|m)\beta)\,A^{(3)}_{0|m}\,.\,P[1,2,3,3,..n]\,f(m+1|1)$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+ (\alpha + (0|m)\beta)\,A^{(n)}_{0|m}\,.\,P[1,2,3,..n,n]\,f(m+1|1)$$

Die Gleichsetzung der oberen Stellenzahlen führt uns zu den Potenzen. Alle Horizontalreihen werden in diesem Falle gleich, daher

$$279)\quad \left(\alpha - \frac{m}{n}\beta\right) P^{-s}\,f(m+1) = \quad \alpha \quad A_0\,.\,P^{-s-1}\,f(m+1)$$
$$+ (\alpha + 1\,.\,\beta)\,A_1\,.\,P^{-s-1}\,f\,m$$
$$+ (\alpha + 2\,.\,\beta)\,A_2\,.\,P^{-s-1}\,f(m-1)$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+ (\alpha + m\,.\,\beta)\,A_m\,.\,P^{-s-1}\,f\,1$$

Digitized by Google

Diese Form ist mit 246 ganz dieselbe, nur + n und - n wechseln. Diese Gleichung gilt also ganz allgemein für jedes n und ist mithin die Gleichung 36 der Analysis in ihrer ganzen Ausdehnung. An die Uebergänge der allgemeinen Gleichungen 245 und 278 zu dem gemeinsamen besondern Gesetze 246 knüpfen sich interessante Betrachtungen, die beitragen werden, die Gesetze der Potenzen eines Polynomiums in ein helleres Licht zu setzen.

§. 39.

Die Gleichung 275 ist ein specieller Fall einer viel allgemeineren Form, welche wir aus 114 herleiten. Nach diesem Gesetze erhalten wir

$$280)\quad P[1,2,3,..n]\,f(m+1) =$$
$$= P[s,s+1,..s+h-1]\,f_1 \cdot P[1,2,..s-1,s+h,..n]\,f(m+1)$$
$$+ P[s,s+1,..s+h-1]\,f_2 \cdot P[1,2,..s-1,s+h,..n]\,f\,m$$
$$+ P[s,s+1,..s+h-1]\,f_3 \cdot P[1,2,..s-1,s+h,..n]\,f(m-1)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ P[s,s+1,..s+h-1]\,f(m+1) \cdot P[1,2,..s-1,s+h,..n]\,f_1$$

Ist $s=1$, so ist

$$281)\quad P[1,2,3,..n]\,f(m+1) = P[1,2,3,..h]\,f_1 \cdot P[h+1,h+2,..n]\,f(m+1)$$
$$+ P[1,2,3,..h]\,f_2 \cdot P[h+1,h+2,..n]\,f\,m$$
$$+ P[1,2,3,..h]\,f_3 \cdot P[h+1,h+2,..n]\,f(m-1)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ P[1,2,3,..h]\,f(m+1) \cdot P[h+1,h+2,..n]\,f_1$$

Hieraus erhält man für die verneinten Potenzen eines Polynomiums, wenn man $n=h+k$ setzt,

Digitized by Google

282) $$P^{-k-h} f(m+1) = P^{-h} f_1 \cdot P^{-k} f(m+1) + P^{-h} f_2 \cdot P^{-k} f m + P^{-h} f_3 \cdot P^{-k} f(m-1) + \ldots + P^{-h} f(m+1) \cdot P^{-k} f_1$$

Dieselbe Gleichung haben wir in 250 gefunden, mit dem Unterschiede, dass dort beide Exponenten positiv sind. Es kann nun gefragt werden: Müssen beide Potenzen zugleich bejaht oder zugleich verneint seyn, oder kann die eine bejaht und die andere verneint seyn?

Wir kehren zur Gleichung 45 zurück und erhalten aus ihr

283) $$P(1,2,..s-1,s+h,..n) f(m+1) = = P[s,s+1,..s+h-1] f_1 \cdot P(1,2,3,..n) f(m+1) + P[s,s+1,..s+h-1] f_2 \cdot P(1,2,3,..n) f m + P[s,s+1,..s+h-1] f_3 \cdot P(1,2,3,..n) f(m-1) + \ldots + P[s,s+1,..s+h-1] f(m+1) \cdot P(1,2,3,..n) f_1$$

Für $s=1$ wird hieraus

284) $$P(h+1,h+2,..n) f(m+1) = P[1,2,3,..h] f_1 \cdot P(1,2,3,..n) f(m+1) + P[1,2,3,..h] f_2 \cdot P(1,2,3,..n) f m + P[1,2,3,..h] f_3 \cdot P(1,2,3,..n) f(m-1) + \ldots + P[1,2,3,..h] f(m+1) \cdot P(1,2,3,..n) f_1$$

Für die Potenzen erhalten wir, wenn $n=k$ gesetzt wird

285) $$P^{k-h} f(m+1) = P^{-h} f_1 \cdot P^{k} (m+1) + P^{-h} f_2 \cdot P^{k} m + P^{-h} f_3 \cdot P^{k} (m-1) + \ldots + P^{-h} f(m+1) \cdot P^{k} f_1$$

Digitized by Google

Auf gleiche Weise erhalten wir aus 132 folgendes Gesetz:

286) $$P[1,2,..s-1,s+h,..n]\,f(m+1) =$$
$$= P(s,s+1,..s+h-1)\,f_1 \,.\, P[1,2,3,..n]\,f(m+1)$$
$$+ P(s,s+1,..s+h-1)\,f_2 \,.\, P[1,2,3,..n]\,f\,m$$
$$+ P(s,s+1,..s+h-1)\,f_3 \,.\, P[1,2,3,..n]\,f(m-1)$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+ P(s,s+1,..s+h-1)\,f(m+1) \,.\, P[1,2,3,..n]\,f_1$$

und, wenn $s = 1$

287) $$P[h+1,h+2,..n]\,f(m+1) = P(1,2,3,..h)\,f_1 \,.\, P[1,2,3,..n]\,f(m+1)$$
$$+ P(1,2,3,..h)\,f_2 \,.\, P[1,2,3,..n]\,f\,m$$
$$+ P(1,2,3,..h)\,f_3 \,.\, P[1,2,3,..n]\,f(m-1)$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+ P(1,2,3,..h)\,f(m+1) \,.\, P[1,2,3,..n]\,f_1$$

Die Potenzen der Polynomien zeigen hiernach folgendes Gesetz, wenn wieder $n = k$ gesetzt wird

288) $$P^{-k+h} = P^h f_1 \,.\, P^{-k} f(m+1)$$
$$+ P^h f_2 \,.\, P^{-k} f\,m$$
$$+ P^h f_3 \,.\, P^{-k} f(m-1)$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+ P^h f(m+1) \,.\, P^{-k} f_1$$

Aus den Gleichungen dieses §. geht nun hervor, dass das Gesetz, welches wir in 250 für bejahte Potenzen gefunden haben, ganz allgemein gilt, wie auch k und h beschaffen seyn mögen.

§. 40.

Der Gleichung 251 entspricht ein anderes Gesetz, welches wir aus 122 herleiten. Es ist nach dieser Gleichung

Digitized by Google

289) $$P\,[1,2,3,..n]\,f\,(m+1) =$$

$$= \frac{1}{A_o^{(s)}.A_o^{(s+1)}...A_o^{(s+h-1)}}.\frac{A}{A_o}\Big([s,s+1,..s+h]^{(o)}\,f(o|m)\Big).P\,[1,2,..s-1,s+h,..n]\,f\,(m+1|1)$$

$$- \frac{1}{A_o^{(s)}.A_o^{(s+1)}...A_o^{(s+h-s)}}.\frac{A}{A_o}\Big([s,s+1,..s+h-1]^{(1)}\,f(1|m)\Big).P\,[1,2,..s-1,s+h-1,..n]\,f\,(m|1)$$

$$+ \frac{1}{A_o^{(s)}.A_o^{(s+1)}...A_o^{(s+h-s)}}.\frac{A}{A_o}\Big([s,s+1,..s+h-2]^{(2)}\,f(2|m)\Big).P\,[1,2,..s-1,s+h-2,..n]\,f\,(m-1|1)$$

$$- \quad .$$

$$(-)^m.\frac{1}{A_o^{(s)}.A_o^{(s+1)}...A_o^{(s+h-m-1)}}.\frac{A}{A_o}\Big([s,s+1,..s+h-m]^{(m)}\,f(m|m)\Big).P\,[1,2,..s-1,s+h-m,..n]\,f(1|1)$$

Werden aber die oberen Stellenzahlen gleich, so geht diese Gleichung über in

290) $$P^{-n}\,f\,(m+1) = A_o^{-h}\Big(\frac{(-h)^{o|1}}{1^{o|1}}.A\,\Big(f\,(o|m)\,(1,2,3,..)\Big)^{(o)}.P^{-n+h}\,f\,(m+1|1)$$

$$+\frac{(-h)^{1|1}}{1^{1|1}}.A\,\Big(f\,(1|m)\,(1,2,3,..)\Big)^{(1)}.P^{-n+h-1}\,f\,(m|1)$$

$$+\frac{(-h)^{2|1}}{1^{2|1}}.A\,\Big(f\,(2|m)\,(1,2,3,..)\Big)^{(2)}.P^{-n+h-2}\,f(m-1|1)$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+\frac{(-h)^{m|1}}{1^{m|1}}.A\,\Big(f\,(m|m)\,(1,2,3,..)\Big)^{(m)}.P^{-n+h-m}\,f\,(1|1)\Big)$$

Setzen wir auch hierin $h = n-k$, so entsteht

291) $$P^{-n}\,f\,(m+1) = A_o^{-n+k}\Big(\frac{(-n+k)^{o|1}}{1^{o|1}}.A\,\Big(f\,(o|m)\,(1,2,3,..)\Big)^{(o)}.P^{-k}\,f\,(m+1|1)$$

$$+\frac{(-n+k)^{1|1}}{1^{1|1}}.A\,\Big(f\,(1|m)\,(1,2,3,..)\Big)^{(1)}.P^{-k-1}\,f\,(m|1)$$

$$+\frac{(-n+k)^{2|1}}{1^{2|1}}.A\,\Big(f\,(2|m)\,(1,2,3,..)\Big)^{(2)}.P^{-k-2}\,f\,(m-1|1)$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+\frac{(-n+k)^{m|1}}{1^{m|1}}.A\,\Big(f\,(m|m)\,(1,2,3,..)\Big)^{(m)}.P^{-k-m}\,f\,(1|1)\Big)$$

Die Gleichung, welche wir hier gefunden haben, entspricht dem Gesetze 252, und wir sehen, dass dieses Gesetz auch gilt, wenn n und

Digitized by Google

k negativ sind. Den Ausdruck 291 hätten wir auch aus unserer Gleichung 143 herleiten können, eben so würde 167 zu 252 geführt haben.

Betrachten wir die Verbindungen, welche die Glieder des Polynomiums begleiten, wieder als Glieder des verkürzten Polynomiums, so wird

$$292)\quad P^{-n}\mathfrak{f}(m+1) = A_0^{-n+k}\Big(\frac{(-n+k)^{0|1}}{1^{0|1}}(1,2,3,..)\,P^0\mathfrak{f}(1|m+1)\,.\,P^{-k}\mathfrak{f}(m+1|1)$$
$$+\frac{(-n+k)^{1|1}}{1^{1|1}}(1,2,3,..)\,P^1\mathfrak{f}(1|m)\,.\,P^{-k-1}\mathfrak{f}(m|1)$$
$$+\frac{(-n+k)^{2|1}}{1^{2|1}}(1,2,3,..)\,P^2\mathfrak{f}(1|m-1)\,.\,P^{-k-2}\mathfrak{f}(m-1|1)$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\frac{(-n+k)^{m|1}}{1^{m|1}}(1,2,3,..)\,P^m\mathfrak{f}(1|1)\,.\,P^{-k-m}\mathfrak{f}(1|1)\Big)$$

§. 41.

Die Gleichung 192 führt uns zu allgemeineren Gesetzen der Polynomien; auf gleiche Art, wie die vorhergehenden, ziehen wir aus dieser Gleichung die folgende.

$$293)\quad \left(\alpha - \frac{m.h}{n}\beta\right).\frac{n^{h|1}}{1^{h|1}}.P[1,2,3,..n]\,\mathfrak{f}(m+1) =$$
$$= \alpha\;.\;P[(1_1,1,..1_h)\,\mathfrak{f}1\;.\;P[[1_1,1,..1_h,1,2,..n]\,\mathfrak{f}(m+1)$$
$$+\left(\alpha+1.\beta\right).P[(1_1,1,..1_h)\,\mathfrak{f}2\;.\;P[[1_1,1,..1_h,1,2,..n]\,\mathfrak{f}m\;.$$
$$+\left(\alpha+2.\beta\right).P[(1_1,1,..1_h)\,\mathfrak{f}3\;.\;P[[1_1,1,..1_h,1,2,..n]\,\mathfrak{f}(m-1)$$
$$+\;.$$
$$+\left(\alpha+m.\beta\right).P[(1_1,1,..1_h)\,\mathfrak{f}(m+1)\;.\;P[[1_1,1,..1_h,1,2,..n]\,\mathfrak{f}1$$

Wenn hierin die oberen Stellenzahlen gleich werden, so entsteht jede Horizontalreihe, wegen der Veränderung durch [angedeutet, so

Digitized by Google

oft als sich geordnete Verbindungen mit Wiederholung aus n Elementen zu h Elementen bilden lassen, also $\frac{n^{\underline{h}|}}{1^{\underline{h}|}}$ mal. Diesen Faktor nehmen wir von beiden Seiten hinweg und setzen $n = k-h$, so wird

294) $$\left(\alpha - \frac{m.h}{k-h}\beta\right) . P^{-k+h} f(m+1) = \alpha . P^h f_1 . P^{-k} f(m+1) + \left(\alpha + 1.\beta\right) . P^h f_2 . P^{-k} f m + \left(\alpha + 2.\beta\right) . P^h f_3 . P^{-k} f(m-1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\alpha + m.\beta\right) . P^h f(m+1) . P^{-k} f_1$$

Dies ist die Gleichung 37 der Analysis, welche wir in 255 für ein ganzes bejahtes und hier für ein ganzes verneintes k bewiesen haben; aus ihr erhalten wir unsere Gleichung 279, wenn wir $h = 1$ und $k = n+1$ setzen.

In den beiden Gleichungen 255 und 294 ist h positiv, während k beide Zeichen haben kann. Es kann nun gefragt werden: Gilt für h auch dasselbe, finden diese Gleichungen für jeden Werth, sowohl für h als für k statt? Unsere Gleichungen 193 und 194 geben uns hierüber Aufschluss; auf die angezeigte Weise leiten wir aus ihnen die folgenden Gesetze ab.

295) $$\left(\alpha - \frac{m.h}{n}\beta\right) . \frac{n^{\underline{h}|}}{1^{\underline{h}|}} . P(1,2,3,..n) f(m+1) = \alpha . P[[1,,1,..1_h] f_1 . P[(1,,1,..1_h,1,2,..n) f(m+1) + \left(\alpha + 1.\beta\right) . P[[1,,1,..1_h] f_2 . P[(1,,1,..1_h,1,2,..n) f m + \left(\alpha + 2.\beta\right) . P[[1,,1,..1_h] f_3 . P[(1,,1,..1_h,1,2,..n) f(m-1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\alpha + m.\beta\right) . P[[1,,1,..1_h] f(m+1) . P[(1,,1,..1_h,1,2,..n) f_1$$

und

Digitized by Google

$$296)\quad \left(\alpha+\frac{m.h}{n}\beta\right).\frac{n^{h|-1}}{1^{h|}}.P[1,2,3,..]\,f(m+1)=$$
$$=\quad \alpha\quad .P([1,2,3,..h]f_1.P([h+1,h+2,..n]f(m+1)$$
$$+\left(\alpha+1.\beta\right).P([1,2,3,..h]f_2.P([h+1,h+2,..n]f\,m$$
$$+\left(\alpha+2.\beta\right).P([1,2,3,..h]f_3.P([h+1,h+2,..n]f(m-1)$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+\left(\alpha+m.\beta\right).P([1,2,3,..h]f(m+1).P([h+1,h+2,..n]f_1$$

Aus 295 erhalten wir für die Potenzen der Polynomien, indem wir $n=k-h$ setzen

$$297)\quad \left(\alpha-\frac{m.h}{k-h}\beta\right).P^{k-h}f(m+1)=\quad \alpha\quad .P^{-h}f_1.P^{k}f(m+1)$$
$$+\left(\alpha+1.\beta\right).P^{-h}f_2.P^{k}f\,m$$
$$+\left(\alpha+2.\beta\right).P^{-h}f_3.P^{k}f(m-1)$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+\left(\alpha+m.\beta\right).P^{-h}f(m+1).P^{k}f_1$$

Für denselben Fall entsteht aus 296, wenn wir $n=k+h$ setzen, die folgende Gleichung

$$298)\quad \left(\alpha+\frac{m.h}{k+h}\beta\right).P^{-k-h}f(m+1)=\quad \alpha\quad .P^{-h}f_1.P^{-k}f(m+1)$$
$$+\left(\alpha+1.\beta\right).P^{-h}f_2.P^{-k}f\,m$$
$$+\left(\alpha+2.\beta\right).P^{-h}f_3.P^{-k}f(m-1)$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+\left(\alpha+m.\beta\right).P^{-h}f(m+1).P^{-k}f_1$$

Die Gesetze, welche wir in diesem §. gefunden haben, sind allgemeinere Formen der Gleichungen des §. 39. Die Gleichung 294 entspricht 288, die 297 der Gleichung 285 und zuletzt entspricht 298 der Gleichung 282.

Digitized by Google

§. 42.

Wir haben bis jetzt eine Reihe von Gleichungen aufgestellt, welche denen beim Vervielfachen gefundenen entsprechen. Eben so ziehen wir aus unsern Untersuchungen über die Beschränkungen der unteren Stellenzahlen, bei den gedoppelten Verbindungen mit Wiederholungen, Gesetze, welche denen in den §§. 35 und 36 entsprechen.

Vermittelst unserer Gleichung 200 finden wir die folgende.

$$299)\quad P\,[1,2,3,..n]\,\mathfrak{k}\,(m+1) = (0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P\,[1,2,3,..n]\,\mathfrak{k}\,(m+1)$$
$$- A\left([(1)^{(1)}\,\mathfrak{f}\,(s|s+q-1)\,(s,s+1,..s+q-1)\right).(0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P\,[[1,1,2,3,..n]\,\mathfrak{k}\,(m-s+1|m-s-q+2)$$
$$+ A\left([(1,1)^{(2)}\,\mathfrak{f}\,(2s|2s+2q-2)\,(s,s+1,..s+q-1)\right).(0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P\,[[1,1,1,2,3,..n]\,\mathfrak{k}\,(m-2s+1|m-2s-2q+3)$$
$$- A\left([(1,1,1)^{(3)}\,\mathfrak{f}\,(3s|3s+3q-3)\,(s,s+1,..s+q-1)\right).(0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P\,[[1,1,1,1,2,3,..n]\,\mathfrak{k}\,(m-3s+1|m-3s-3q+4)$$
$$+ \;.\;.\;.\

301) $P^{-n} f(m+1) = (0,1,2,..s-1,s+q,..)\ P^{-n} f(m+1)$

$+ \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot A \left(f(s|s+q-1)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(1)} \cdot (0,1,2,..s-1,s+q,..)\ P^{-n-1} f(m-s+1|m-s-q+2)$

$+ \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot A \left(f(2s|2s+2q-2)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(2)} \cdot (0,1,2,..s-1,s+q,..)\ P^{-n-2} f(m-2s+1|m-2s-2q+3)$

$+ \frac{(-n)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot A \left(f(3s|3s+3q-3)(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(3)} \cdot (0,1,2,..s-1,s+q,..)\ P^{-n-3} f(m-3s+1|m-3s-3q+4)$

$+ \quad . \quad . \quad .

Und wenn die oberen Stellenzahlen gleich werden

$$304)\quad P^{-s}\mathfrak{k}(m+1) = (0,s+1,s+2,..)\,P^{-s}\mathfrak{k}(m+1)$$
$$+\ \frac{(-n)^{s|-s}}{1^{s|}}\cdot A\left(\mathfrak{f}(1|s)\,(1,2,3,..s)\right)^{(s)}\cdot(0,s+1,s+2,..)\,P^{-s-1}\mathfrak{k}(m|m-s+1)$$
$$+\ \frac{(-n)^{s|-s}}{1^{s|}}\cdot A\left(\mathfrak{f}(2|2s)\,(1,2,3,..s)\right)^{(s)}\cdot(0,s+1,s+2,..)\,P^{-s-1}\mathfrak{k}(m-1|m-2s+1)$$
$$+\ \frac{(-n)^{s|-s}}{1^{s|}}\cdot A\left(\mathfrak{f}(3|3s)\,(1,2,3,..s)\right)^{(s)}\cdot(0,s+1,s+2,..)\,P^{-s-1}\mathfrak{k}(m-2|m-3s+1)$$
$$+\ .$$

§. 43.

Durch die Gleichung 204 sind wir im Stande, die umgekehrte Aufgabe des vorigen §. zu lösen. Wir erhalten auf die bekannte Weise aus dieser Gleichung

$$305)\quad (0,1,2,..s-1,s+q,..)\,P\,[1,2,3,..n]\,\mathfrak{k}(m+1) = P\,[1,2,3,..n]\,\mathfrak{k}(m+1)$$
$$+\ A\left([(1)^{(1)}\,\mathfrak{f}\,(s|s+q-1)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)\cdot P\,[[1,1,2,3,..n]\,\mathfrak{k}\,(m-s+1|m-s-q+2)$$
$$+\ A\left([(1,1)^{(2)}\,\mathfrak{f}\,(2s|2s+2q-2)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)\cdot P\,[[1,1,1,2,3,..n]\,\mathfrak{k}\,(m-2s+1|m-2s-2q+3)$$
$$+\ A\left([(1,1,1)^{(3)}\,\mathfrak{f}\,(3s|3s+3q-3)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)\cdot P\,[[1,1,1,1,2,3,..n]\,\mathfrak{k}\,(m-3s+1|m-3s-3q+3)$$
$$+\ .$$

Und wenn alle höheren Elemente fehlen

Digitized by Google

$$306)\quad (0,1,2,..s-1)\ P\,[1,2,3,..n]\,f(m+1) = P\,[1,2,3,..n]\,f(m+1)$$
$$+ A\left([(1)^{(1)}\,f(s|m)\,(s,s+1,..)\right)\ .\ P\,[[1,1,2,3,..n]\,f(m-s+1|1)$$
$$+ A\left([(1,1)^{(1)}\,f(2s|m)\,(s,s+1,..)\right)\ .\ P\,[[1,1,1,2,3,..n]\,f(m-2s+1|1)$$
$$+ A\left([(1,1,1)^{(1)}\,f(3s|m)\,(s,s+1,..)\right)\ .\ P\,[[1,1,1,1,2,3,..n]\,f(m-3s+1|1)$$
$$+ \ .$$

Der Uebergang zu den Potenzen findet wieder auf die gewöhnliche Weise statt; wir nehmen die oberen Stellenzahlen alle gleich an und erhalten aus 305

$$307)\quad (0,1,2,..s-1,s+q,..)\ P^{-s}\,f(m+1) = P^{-s}\,f(m+1)$$
$$-\frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}}\,.\,A\left(f(s|s+q-1)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(1)}.\,P^{-s-1}\,f(m-s+1|m-s-q+2)$$
$$+\frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}}\,.\,A\left(f(2s|2s+2q-2)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(2)}.\,P^{-s-2}\,f(m-2s+1|m-2s-2q+3)$$
$$-\frac{(-n)^{3|-1}}{1^{3|1}}\,.\,A\left(f(3s|3s+3q-3)\,(s,s+1,..s+q-1)\right)^{(3)}.\,P^{-s-3}\,f(m-3s+1|m-3s-3q+4)$$
$$+\ .$$

und aus 306

$$308)\quad (0,1,2,..s-1)\ P^{-s}\,f(m+1) = P^{-s}\,f(m+1)$$
$$-\frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}}\,.\,A\left(f\,(s|m)\,(s,s+1,..)\right)^{(1)}.\,P^{-s-1}\,f\,(m-s+1|1)$$
$$+\frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}}\,.\,A\left(f\,(2s|m)\,(s,s+1,..)\right)^{(2)}.\,P^{-s-2}\,f\,(m-2s+1|1)$$
$$-\frac{(-n)^{3|-1}}{1^{3|1}}\,.\,A\left(f\,(3s|m)\,(s,s+1,..)\right)^{(3)}.\,P^{-s-3}\,f\,(m-3s+1|1)$$
$$+\ .$$

Betrachtet man die Verbindungen, welche die Vorzahlen begleiten, als Glieder in der Entwickelung von Polynomien, so kann man sie nach 236 ersetzen.

Digitized by Google

Eine Vergleichung der Gesetze der Potenzen der beiden letzten §§. mit denen in 35 und 36 zeigt ferner, dass dieselben Gleichungen statt finden für ein negatives n sowohl, wie für ein positives, und dass sie daher ganz allgemein für jedes n gelten.

Druck
von
August Osswald
in Heidelberg.

Digitized by Google

Verbesserungen.

Seite 7 Zeile 3 v.u. statt werin lies worin

— 8 erste Colonne st. $A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_2^{(1)}$ l. $A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_3^{(1)}$

— 11 Z. 5 v.o. st. $A\left((1,2,4,5)^{(2)}f(2)\right).A_1^{(2)}$ l. $A\left((1,2,4,5)^{(2)}f(2)\right).A_3^{(2)}$

— 19 Z. 1 v.o. st. $A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_3^{(6)}$ l. $=A_1^{(1)}.A_1^{(2)}.A_1^{(3)}.A_3^{(6)}$

— 21 Z. 6 u. 11 v.u. st. $A(h+1,h+2,..n)^{(n-2)}$ l. $A(h+1,h+2,..n)^{(p-2)}$

— 23 Z. 4 v.u. st. $A\left((1,2,..s-1,s\ \ h+1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$ lies
$A\left((1,2,..s-1,s+h-1,..n)^{(p-1)}f(m-1|p-1)\right)$

— 24 Z. 12 v.o. st. $A\left((1,2,s-1,s+h+2,..n)^{(0)}f(m-p|0)\right)$ lies
$A\left((1,2,..s-1,s+h+2,..n)^{(0)}f(m-p|0)\right)$

— 31 statt der ersten und zweiten Zeile v.o. lies: Diese Gleichung fällt mit 392 der Analysis zusammen.

— 32 Z. 6 v.o. st. $A\left([3,4]^{(2)}f(3)\right)$ l. $A\left([3,4]^{(2)}f(3)\right)$

— 36 Z. 7 v.u. st. $-A[1,2,3,..n]^{(1)}$ l. $-A[1,2,3,..n]^{(2)}$

— 36 Z. 6 v.u. st. $.A[1,2,3,..n]^{(2)}$ l. $.A[1,2,3,..n]^{(1)}$

— 45 Z. 5 v.o. st. haben. l. heben.

— 45 Z. 5 u. 6 v.u. st. $f(m-p\ \ h)$ l. $f(m-p+h)$

— 48 Z. 12 u. 22 v.o. st. $f(m-p\ \ h)$ l. $f(m-p+h)$

— 51 Z. 10 v.o. st. $A\left((1,3,4,..n)^{(p-1)}---\right)$ l. $A\left((1,2,4,..n)^{(p-1)}---\right)$

— 52 Z. 12 v.o. st. $A\left((h+1,h+2,..h)^{(p)}f(m|p)\right)$ l. $A\left((h+1,h+2,..n)^{(p)}f(m|p)\right)$

— 63 Z. 12 v.o. st. p l. q

— 69 Z. 9 v.o. st. in $\left(f---\right)$ l. in $A\left(f---\right)$

— 82 Z. 9 v.u. st. $A\left((s,s+1,..s+h-1)^{(0)}f---\right)$ l. $A\left((s,s+1,..s+h)^{(0)}f---\right)$

— 96 Z. 5 v.u. st. $f(p|m)$ l. $f(p|m)\Big)$

— 111 Z. 14 u. 15 v.o. st. $[1,,1,..1_{h-1},2,..n]$ l. $[1,,1,..1_{h-1},1,2,..n]$

— 115 Z. 11 v.o. st. + l. −

— 126 Z. 14 v.o. st. $\frac{(n+1)^{p-1|1}}{1^{p-1|1}}$ l. $\frac{(n+1)^{p-1|1}}{1^{p-1|1}}$

— 126 Z. 15 v.o. st. $\frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}$ l. $\frac{n^{1|1}}{1^{1|1}}$

Digitized by Google

Digitized by Google